ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია ხაჩიძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი რომან კოპლატაძე

თბილისი

2021

რეზიუმე

ნაშრომი ეძღვნება მაღალი რიგის დისკრეტული განტოლების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლას უსასრულობის მიდამოში. კერძოდ, მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებებისათვის დადგენილია შემოუსაზღვრელი, ქრობადი და რხევადი ამონახსნების არსებობის საკითხი. ანალოგიური ამოცანა ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისათვის თითქმის კარგად არის შესწავლილი. რაც შეეხება მაღალი რიგის ემდენ-ფაულერის ტიპის არაწრფივ დისკრეტულ განტოლებებს, აქ თითქმის არ არის გამოკვლეული მისი ამონახსნების ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში. ძირითადად ეს გამოწვეული იყო იმით, რომ არ იყო შესწავლილი მონოტონური (დისკრეტული) ფუნქციების ზოგიერთი თვისება.

ნაშრომის პირველ თავში მოყვანილია ტეილორის ტიპის ფორმულები (დისკრეტული ფუნქციების შემთხვევაში, ფუნქცია წარმოდგენილი იყოს მაღალი რიგის სხვაობების საშუალებით). ამ ფორმულების საშუალებით დადგენილია დისკრეტული ფუნქციების ზოგიერთი ახალი თვისება.

ნაშრომის პირველი თავი ძირითადად ეძღვნება მაღალი რიგის ემდენ-ფაულერის სახის დისკრეტულ განტოლებებს. განხილულია სამი შემთხვევა: 1) როცა ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე ნაკლებია და განტოლება არის წინსწრებული არგუმენტით, 2) ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე მეტია და განტოლება არის დაგვიანებული არგუმენტით, 3) ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე ნაკლებია და განტოლება არის დაგვიანებული არგუმენტით. სამივე შემთხვევისთვის მიღებულია საკმარისი პირობები იმისა, რომ განტოლებას გააჩნდეს ეგრეთ წოდებული **A** და **B** თვისება.

მეორე თავში განხილულია თითქმის წრფივი მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებები (თითქმის წრფივს ვუწოდებთ განტოლებას, თუ ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციაა და მისი ზღვარი უსასრულობაში ერთის ტოლია). ასეთი სახის განტოლებებს აქვთ მსგავსება, როგორც წრფივ ისე არაწრფივ განტოლებებთან.

თითქმის წრფივი სხვაობიანი განტოლებები, ჩვენი აზრით, პირველადაა განხილული მოცემულ შრომაში. ასეთი სახის განტოლებებისათვის დადგენილია

საკმარისი პირობები იმისა, რომ მისი ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი. ამონახსნის რხევადობის პირობები მოყვანილია მკაცრი უტოლობის სახით. ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული პირობები ოპტიმალურია. კერძოდ მკაცრი უტოლობა არ შეიძლება შეიცვალოს არამკაცრი უტოლობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებულია ისეთი განტოლების მაგალითი, რომ მოცემულ განტოლებას უსასრულო შუალედში გააჩნია დადებითი ამონახსნი.

მესამე თავში შესწავლილია პირველი რიგის დისკრეტული განტოლება მრავალი დაგვიანებით. მოყვანილია ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები, რომლებიც სპეციფიურია დაგვიანებულ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლებებისათვის. ოპტიმალური შედეგი ერთი დაგვიანების შემთხვევაში მიებული იყო ლადასის, სფიკასის და ფილოსის მიერ (1985). ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები ახალია როგორც მრავალი დაგვიანების, აგრეთვე ერთი დაგვიანების შემთხვევაშიც. მოყვანილია კონკრეტული მაგალითები დისკრეტული განტოლების, სადაც არ სრულდება ზემოთ მოყვანილი მეცნიერების თეორემის პირობები და სრულდება ჩვენი შედეგის პირობები.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Natia Khachidze

Fakulty of exact and natural sciences

Department of Mathematics

About Asymptotic Behavior of Solutions of Higher Order Difference Equations

Phd theses

Scientific Supervisor:

Doctor of Phys. Math. Sciences Roman Koplatadze

Tbilisi

2021

Abstract

The work is dedicated to study asymptotic behavior of solutions of higher order difference equations. In particular, it is established the existence of unbounded, vanishing and oscillatory solutions for higher difference equations. The analogical problem is almost well researched for functional-differential equations. As for higher difference Emden-Fowler's type nonlinear discrete equations, the behavior of solutions almost are not established. It is mainly caused by that some properties of monotone (discrete) functions had not been established before.

In Topic 1 are considered some Taylor's type formulas.(for discrete case, the function was presented with high order differences). Thereare established some new properties of discrate functions using these formulas. This topic is dedicated to study Emden-Fowler's type difference equations. There are three cases: 1. When the power of phase coordinate is less than 1 and equation is with advanced argument. 2. When the power of phase coordinate is more than 1 and equation is with delayed argument. 3. When the power of phase coordinate is less than 1 and equation is with delayed argument. It is established sufficient conditions that equation has so called property A and B for all cases.

In Topic 2 is considered the second order ,,almost linear" equation (we can say that equation is almost linear if the power of phase coordinate is function of independent variable and its limit is 1 when n goes to infinity). These equations have similarity as well with linear equations as with nonlinear equations.

In our opinion, the almost linear equations have not been discussed before this work. sufficient conditions are established that all solutions are oscillatory for these equations. The conditions of oscillatory are introduced with strict inequality. It is shown, that these conditions are optimal.

In Topic 3 it is learned the first order difference equations with several delayed arguments. There is given sufficient conditions of oscillatory which are specific for difference equations with delayed arguments. The optimal result when we have one delayed argument was established by Ladas, Sficas and Philos (1985). The results, which are given in this work, are close as to several delayed arguments as to one delayed argument. There are given examples of discrete equations where the conditions of theorem by Ladas, Philos and Sficas do not fullfiled and conditions of our result are fullfiled.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ძირითადი აღნიშვნები--7

შესავალი

კვლევის საგანი და მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა----------------------8

თავი 1. ემდენ-აულერის ტიპის მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებები

§1. ზოგიერთი სხვაობიანი ფუნქციის კლასების შესახებ----------------------------11

§2. “ℓ” ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები--------------------19

§3. დადებითი ამონახსნების არ არსებობის საკმარირი პირობები-----------------29

§4 სხვაობიანი განტოლებები A და B თვისებით-------------------------------------34

თავი 2. მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა

§5. ზოგიერთი დამხმარე ლემა---47

§6 დადებითიამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები--------------------51

§7ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები----------------------------------64

თავი 3. პირველი რიგის დაგვიანებულ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების სპეციფიური თვისებები

§8 ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები---------------------------------75

დასკვნა--84

ლიტერატურა--85

ძირითადი აღნიშვნები

ყველგან მოცემულ ნაშრომში გამოყენებული იქება შემდეგი აღნიშვნები:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$-ნატურალურ რიცხვთა სიმრვალე;

ვთქვათ $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ მაშინ $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}^{+} = \{\mathrm{k}, \mathrm{k}+1,\dots\}$;

ვთქვათ $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ მაშინ $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}^{-} = \{1,2,\dots \mathrm{k}\}$;

$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; $\mathbb{R}_{+} = [0, +\infty)$;

ვთქვათ $E \subset \mathbb{R}$, მაშინ $\mathbf{S}(\mathbb{N}; E)$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე მოცემულ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეკუთვნის E;

ვთქვათ $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, მაშინ $n -$ ური რიგის სხვაობიანი ოპერატორი $\Delta^{(n)}u(k)$ განიმარტება შემდეგი სახით $\Delta^{(1)}u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\Delta^{(i)}u(k) = \Delta^{(1)}\left(\Delta^{(i-1)}u(k)\right)$ $i = 2, \dots, n$.

ვთქვათ $\tau \in \mathbf{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R}_{+})$ არაკლებადია და $\lim_{k \to +\infty} \tau(k) = +\infty$. $\mathbf{V}(\tau) -$თი აღვნიშნოთ სიმრავლე ასახვებისა $F: \mathbf{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \to \mathbf{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, ისეთი რომ შესრულებულია პირობა: $F(x)(k) = F(y)(k)$ ყოველი $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ და $x, y \in \mathbf{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $x(s) = y(s)$ როცა $s \geq \tau(k)$ $(s \in \mathbb{N})$.

ნებისმიერი $\mathrm{k}_0 \in \mathbb{N} -$თვის, $\mathbf{H}_{k_0,\tau} -$თი აღვნიშნოთ სიმრავლე ყოველი $u \in \mathbf{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $u(k) \neq 0$ როცა$k \geq \min\{k_0; \tau(k_0)\}$ $(k \in \mathbb{N})$.

შესავალი

კვლევის საგანი და მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა

მოცემული შრომა ეძღვნება შემდეგი სახის დისკრეტული განტოლების

$$\Delta^{(n)}u(k)+F(u)(k)=0 \qquad (0.1)$$

ამონახსნების ოსცილაციური თვისებების შესწავლას, სადაც $n\geq 1$, $F\in \mathbf{V}(\tau)$, $\Delta^{(1)}$არის სხვაობის ოპერატორი (განმარტება იხილეთ ძირითად აღნიშვნებში).

ვთქვათ $k\in\mathbb{N}$ ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:

$$F(u)(k)u(k)\geq 0 \quad \text{როცა } \mathrm{k}\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}, \mathrm{u}\in\mathbf{H}_{k_0,\tau} \qquad (0.2)$$

ან

$$F(u)(k)u(k)\leq 0 \quad \text{როცა } \mathrm{k}\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}, \mathrm{u}\in\mathbf{H}_{k_0,\tau} \qquad (0.3)$$

ყველგან იგულისხმება რომ აღნიშვნებში $\mathbf{V}(\tau)$ და $\mathbf{H}_{k_0,\tau}$, τ ფუნქცია აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს და სხვა აღნიშვნები არ იქნება გამოყენებული.

ვთქვათ $k_0\in\mathbb{N}$. ფუნქციას $u:\mathbb{N}_{k_0}^{+}\to\mathbb{R}$ ეწოდება (0.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი თუ

$$\sup\{|u(s)|: s\in\mathbb{N}_{k}^{+}\}>0 \quad \text{როცა } k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}$$

და არსებობს ფუნქცია $\bar{u}\in\mathbf{S}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ ისეთი, რომ $\bar{u}(k)=u(k)$ როცა $k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}$ და სრულდება ტოლობა

$$\Delta^{(n)}\bar{u}(k)+F(\bar{u})(k)=0 \quad \text{როცა } k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}.$$

(0.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს $u:\mathbb{N}_{k_0}^{+}\to\mathbb{R}$ ეწოდება რხევადი, თუ ნებისმიერი $k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}-$ თვის მოიძებნება $k_1,k_2\in\mathbb{N}_{k}^{+}$ ისეთი, რომ $u(k_1)u(k_2)\leq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ამონახსნი არა არის რხევადი.

განმარტება 0.1. ვიტყვით, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n -ის შემთხვევაში რხევადია, ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს პირობას

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\downarrow 0,\ \text{როცა } k\to+\infty \qquad i=0,\dots,n-1 \qquad (0.4)$$

განმარტება 0.2. ვიტყვით, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{B}$ თვისება , თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს (0.4) პირობას, ან

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\uparrow+\infty, \text{როცა} \quad k\to+\infty \qquad i=0,\dots,n-1, \tag{0.5}$$

ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს (0.5) პირობას.

უკანასკნელი 70 წლის განმავლობაში, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თვისობრივ თეორიაში მიმდინარეობს ინტენსიური მუშაობა. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია რ. ბელმანის [1], დ. სანსონეს [39] და ი. კიღურაძე, თ. ჭანტურიას [11] მონოგრაფიები.

მაღალი რიგის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, როცა მარჯვენა მხარეს გააჩნია ემდენ-ფაულერის სახის არაწრფივი მინორანტი, საკმარისად კარგად არის შესწავლილი შრომებში [2], [5-7], [12-23].

მაღალი რიგის სხვაობიანი სახის ((0.1) განტოლება) განტოლებისათვის ანალოგიური საკითხები თითქმის არ არის შესწავლილი.

ნაშრომი შედგება სამი თავისგან. პირველი თავი ეძღვნება არსებითად არაწრფივი n –ური რიგის სხვაობიან განტოლებას. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია დამხმარე ლემები. კერძოდ დამტკიცებულია ტეილორის ტიპის ფორმულები, სადაც დისკრეტული ფუნქციები წარმოდგენილია მაღალი რიგის სხვაობების საშუალებით. გარდა ამისა დადგენილია (ლემა 1.4) მონოტონური დისკრეტული ფუნქციების ზოგიერთი ახალი ტიპის თვისებები, რომელთაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმისათვის, რომ მომდევნო პარაგრაფში დადგენილი იქნეს აუცილებელი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს გარკვეული სახის მონოტონური წესიერი ამონახსნები.

მეორე პარაგრაფში მოვანილია დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები. კერძოდ, განხილულია შემთხვევები, როდესაც Fოპერატორის მინორანტის ფაზური კოორდინატი დამოკიდებულია სხვადასხვა სახის გადახრებზე.

მესამე პარაგრაფში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას არ გააჩნდეს გარკვეული სახის დადებითი-ზრდადი ამონახსნები.

მეოთხე პარაგრაფში დამტკიცებულია სხვადასხვა სახის თეორემები იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** ან **B** თვისება.

ნაშრომის მეორე თავში განხილულია მეორე რიგის თითქმის წრფივი სხვაობიანი განტოლებები ((0.1) განტოლება, სადაც $n=2$ სრულდება (0.2) პირობა და F

ოპერატორს გააჩნია თითქმის წრფივი მინორანტი). ამ სახის სხვაობიანი განტოლება წარმოადგენს წრფივი განტოლების გარკვეულ გაფართოებას.

მეხუთე პარაგრაფში მოყვანილია დადებითი ამონახსნების ასებობის აუცილებელი პირობები. შემდეგ პარაგრაფში საკმარისად ზოგადი თითქმის წრფივი განტოლებებისათვის მტკიცდება ყოველი ამონახსნის რხევადობის საკმარისი პიობები, რომლებიც წარმოადგენენ წრფივი სხვაობიანი განტოლების შემთხვევაში ცნობილი შედეგების განზოგადებას [24-26], [27-29].

მესამე თავში შესწავლილია (0.1) განტოლება, როცა $n = 1$ და სრულდება (0.2) პირობა, ხოლო F ოპერატორს გააჩნია წრფივი მინორანტი მრავალი დაგვიანებით.

შრომაში მიღებული შედეგები სპეციფიკურია დაგვიანებულ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლებებისათვის და არ აქვს ანალოგი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში. მსგავსი სახის შედეგები იხილეთ შრომებში [1-8], [11-33], [38-39].

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო სამეცნიერო სემინარებზე (თსუ გმი), საერთაშორისო კონფერენციაზე (კვიპროსი, ისრაელი) და გამოქვეყნებულია შრომებში [9-10],[34-37].

თავი 1

ემდენ-ფაულერის ტიპის მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებები

§1. ზოგიერთ სხვაობიან ფუნქციათა კლასების შესახებ

ლემა 1.1. ვთქვათ $n \geq 2$, $k_0 \in \mathbb{N}, u: \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}$ და $u(k) > 0$, $\Delta^{(n)}u(k) \leq 0$ $\left(\Delta^{(n)}u(k) \geq 0\right)$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$, $\Delta^{(n)}u(k) \not\equiv 0$ ნებისმიერი $s \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ და $k \in \mathbb{N}_{s}^{+}$, მაშინ არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ და $\ell \in \{0,\ldots n\}$, ისეთი რომ $\ell + n$ არის კენტი ($\ell + n$ ლუწია) და

$$\Delta^{(i)}u(k) > 0, \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+} \quad (i = 0,\ldots.\ell - 1),$$

$$(-1)^{i+\ell}\Delta^{(i)}u(k) > 0 \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+} \quad (i = \ell,\ldots n-1), , \tag{1.1ℓ}$$

$$(-1)^{n-\ell}\Delta^{(n)}u(k) \geq 0 \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}.$$

დამტკიცება. ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ თუ $u(k) > 0$ და $\Delta^{(2)}u(k) \leq 0$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$, მაშინ არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}$, ისეთი რომ $\Delta^{(1)}u(k) > 0$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

შენიშვნა 1.1. ცხადია,რომთუ $u, v: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ და $\Delta^{(i)}u(k_0) = \Delta^{(i)}v(k_0)$ $(i = 0, \ldots, m-1)$ და $\Delta^{(m)}u(k) = \Delta^{(m)}v(k)$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ $\left(k \in \mathbb{N}_{k_0}^{-}\right)$, მაშინ $u(k) = v(k)$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ $\left(k \in \mathbb{N}_{k_0}^{-}\right)$.

ლემა 1.2. ვთქვათ $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, m, s \in \mathbb{N}$, მაშინ

$$\Delta^{(i)}u(k) = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k - s - r + 1)$$

$$+ \frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=s}^{k} \prod_{r=1}^{m-i-1} (k - j - r + 1)\, \Delta^{(m)}u(j-1)$$

$$(i = 0, \ldots, m-1), \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{s}^{+}, \tag{1.2}$$

სადაც

$$\Delta^{(m)}u(s-1) = 0, \qquad \prod_{r=1}^{0}(k - j - r + 1) = 1 \tag{1.3}$$

და

$$\Delta^{(i)}u(k) = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1)$$

$$-\frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=k}^{s} \prod_{r=1}^{m-i-1} (k-j-r+1)\,\Delta^{(m)}u(j)$$

$$(i=0,\dots,m-1), \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_s^-, \tag{1.4}$$

სადაც

$$\Delta^{(m)}u(s) = 0, \qquad \prod_{r=1}^{0}(k-j-r+1) = 1\,. \tag{1.5}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$u_1(k) = \Delta^{(i)}u(k), \tag{1.6}$$

$$u_2(k) = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) +$$

$$+\frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=s}^{k} \prod_{r=1}^{m-i-1} (k-j-r+1)\,\Delta^{(m)}u(j-1) \qquad k \in \mathbb{N}_s^+. \tag{1.7}$$

რადგან

$$\Delta^{(1)}\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) = \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+2) - \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) =$$

$$= \prod_{r=0}^{j-i-1}(k-s-r+1) - \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) =$$

$$= (k+1-s)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1) - (k+1+i-j-s)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1) =$$

$$= (j-i)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1),$$

ამიტომ (1.3), (1.6) და (1.7) თანახმად მივიღებთ, რომ $\Delta^{(j)}u_1(s) = \Delta^{(j)}u_2(s)$ $(j = 0,\dots,m-i-1)$ და $\Delta^{(m-i)}u_1(k) = \Delta^{(m-i)}u_2(k)$ როცა $k \in \mathbb{N}_s^+$. მაშასადამე სრულდება შენიშვნა 1.1-ის პირობები, რაც ამტკიცებს (1.2) ტოლობის სამართლიანობას. (1.5) პირობის თანახმად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სამართლიანია (1.4) ტოლობა.

ლემა 1.3. ვთქვათ $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $m, s \in \mathbb{N}$, მაშინ სრულდება შემდეგი ტოლბები

$$\sum_{i=s}^{k} i^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(i)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}-$$

$$-\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(s+1)\Delta^{(m-i-1)}(s+i+1-m)^{m-j-1}\,, \tag{1.8}$$

როცა $k\in\mathbb{N}_s^+$ $(j=0,\dots,m-1)$,

სადაც

$$\Delta^{(m)}u(s)=0 \tag{1.9}$$

და

$$-\sum_{i=k}^{s}(i+1)^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(i+1)$$

$$=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}-$$

$$-\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(s+1)\Delta^{(m-i-1)}(s+i+1-m)^{m-j-1}\,, \tag{1.10}$$

როცა $k\in\mathbb{N}_s^-$ $(j=0,\dots m-1)$,

სადაც

$$\Delta^{(m)}u(s+1)=0. \tag{1.11}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $u,v\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, მაშინ

$$\Delta^{(1)}\big(u(k)v(k)\big)=v(k+1)\Delta^{(1)}u(k)+u(k)\Delta^{(1)}v(k).$$

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით

$$\Delta^{(1)}\left(\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}\right)=$$

$$=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i+1)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+2-m)^{m-j-1}+$$

$$+\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1} \tag{1.12}$$

რადგან

$$\Delta^{(m-j)}(k+j+1-m)^{m-j-1}=0,$$

(1.12)-დან გვაქვს

$$\Delta^{(1)}\left(\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}\right)=$$

$$=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i+1)}u(k+1)\Delta^{(m-i-1)}(k+i+2-m)^{m-j-1}+$$

$$+\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1}=$$

$$=\sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1}+$$

$$+\Delta^{(m)}u(k+1)(k+1)^{m-j-1}-\sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1}$$

$$=(k+1)^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k+1).$$

მეორეს მხრივ

$$\Delta^{(1)}\left(\sum_{i=s}^{k}i^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(i)\right)=(k+1)^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k+1),$$

ამიტომ (1.9)-ის თანახმად, თუ გავითვალისწინებთ 1.1 შენიშვნას, ცხადია რომ სრულდება (1.8) ტოლობა. (1.11) პირობის თანახმად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (1.10) ტოლობა. რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

შენიშვნა 1.2. ვთქვათ $s>k$, მაშინ ქვემოთ იგულისხმება, რომ

$$\sum_{i=k}^{s}i=-\sum_{i=s}^{k}i$$

ლემა 1.4. ვთქვათ $u\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R},\ k_0,n\in\mathbb{N}$ და

$$(-1)^i\Delta^{(i)}u(k)>0\quad (i=0,\dots n-1),\quad (-1)^n\Delta^{(n)}u(k)\geq 0\qquad \textit{როცა}\ \ k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}.\qquad (1.13)$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-1}\left|\Delta^{(n)}u(k)\right|<+\infty,\qquad (1.14)$$

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\geq\frac{1}{(n-i-1)!}\sum_{i=k}^{+\infty}\prod_{r=1}^{n-i-1}(j-k+r-1)\left|\Delta^{(n)}u(j)\right|\qquad (1.15)$$

როცა $k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}$ $(i=\overline{0,n-1})$,

$$u(k)\geq u(s)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left|\Delta^{(j)}u(s)\right|}{j!}\prod_{r=1}^{j}(j-k+r-1)\qquad \text{როცა}\ \ s\geq k.\qquad (1.16)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $k_0 \le k < s$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta^{(n)}u(s) = 0$. ვთქვათ $m = n$, (1.13) პირობის თანახმად (1.4) პირობიდან გვაქვს

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| = (-1)^i\Delta^{(i)}u(k) =$$

$$= \sum_{j=i}^{m-1} \frac{(-1)^i\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) -$$

$$-\frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=k}^{s}(-1)^i \prod_{r=1}^{m-i-1}(k-j-r+1)\Delta^{(m)}u(j).$$

მაშასადამე

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{(-1)^{j+i-i}\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(s+r-k-1)$$

$$-\frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=k}^{s}(-1)^{m-i-1+i} \prod_{r=1}^{m-i-1}(j+r-k-1)\Delta^{(m)}u(j) =$$

$$= \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\left|\Delta^{(j)}u(s)\right|}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(s+r-k-1)$$

$$+\frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=k}^{s}(-1)^m\Delta^{(m)}u(j) \prod_{r=1}^{m-i-1}(j+r-k-1).$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| \ge \frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{j=k}^{s}\left|\Delta^{(m)}u(j)\right| \prod_{r=1}^{m-i-1}(j+r-k-1).$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $s \to +\infty$, მივიღებთ, რომ სრულდება (1.14) და (1.15) პირობები. (1.16) უტოლობა გამომდინარეობს (1.4) ტოლობიდან.

ლემა 1.5. ვთქვათ $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, და რომელიმე $k_1 \in \mathbb{N}$ − თვის და $\ell \in \{1, \dots n-1\}$, სრულდება (1.1) უტოლობები, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(k)\right| < +\infty, \tag{1.17}$$

არსებობს $k_2 \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}$ ისეთი, რომ

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| \ge \frac{1}{(n-i-1)!}\sum_{j=k}^{+\infty} \prod_{r=1}^{n-i-1}(j+r-k-1)\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| \tag{1.18}$$

როცა $k \in \mathbb{N}^+_{k\,2}$ $(i = \ell, \dots . n-1)$,

$$\Delta^{(i)}u(k) \geq \Delta^{(i)}u(k_2) + \frac{1}{(\ell-i-1)!\,(n-\ell-1)!}\sum_{s=k_2}^{k-1}\prod_{r=1}^{\ell-i-1}(k+r-s-1) \times$$

$$\times \sum_{j=s}^{+\infty}\prod_{r=1}^{n-\ell-1}(j+r-s-1)\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}^+_{k_2+1} \ \left(i = \overline{0, \ell-1}\right). \tag{1.19}$$

გარდა ამისა, თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(k)\right| = +\infty, \tag{1.20}$$

მაშინ

$$\frac{u(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-1}(k-i)}\downarrow, \qquad \frac{u(k)}{\prod_{i=1}^{\ell-1}(k-i)}\uparrow, \tag{1.21}$$

საკმარისად დიდი k-თვის

$$u(k) \geq \frac{1+o(1)}{\ell!}k^{\ell-1}\Delta^{(\ell-1)}u(k) \tag{1.22}$$

და

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{k}{(n-\ell-1)!}\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(i)\right| + \frac{1}{(n-\ell-1)!}\sum_{i=k_2}^{k} i^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(i)\right|, \tag{1.23}$$

როცა $k \in \mathbb{N}^+_{k_2}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $k; s \in \mathbb{N}^+_{k_2}$ და $s < k$. ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (1.9) პირობა. (1.1_ℓ)-ის თანახმად (1.8) ტოლობიდან როცა $j = \ell$ და $m = n$

$$\sum_{i=s}^{k}(-1)^{n+\ell}i^{n-\ell-1}\Delta^{(n)}u(i) = \sum_{i=\ell}^{n-1}(-1)^{\ell+i}\Delta^{(i)}u(s+1)\Delta^{(n-i-1)}(s+i+1-n)^{n-\ell-1} -$$

$$-\sum_{i=\ell}^{n-1}(-1)^{\ell+i}\Delta^{(i)}u(k+1)\Delta^{(n-i-1)}(k+i+1-n)^{n-\ell-1}.$$

მაშასადამე, რადგან $(-1)^{n+\ell}\Delta^{(n)}u(i) \geq 0$ *და* $(-1)^{i+n}\Delta^{(n)}u(k) > 0$ $(i = \ell, \dots, n-1)$ მოცემული ტოლობიდან გვაქვს

$$\sum_{i=s}^{k} i^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(i)\right| \leq \sum_{i=\ell}^{n-1}\left|\Delta^{(i)}u(s+1)\right|\Delta^{(n-i-1)}(s+i+1-n)^{n-\ell-1}$$

როცა $k \in \mathbb{N}^+_s$.

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ რომ სრულდება (1.17) უტოლობა. (1.11)-დან აგრეთვე გამომდინარეობს შემდეგიუტოლობა

$$\sum_{i=\ell}^{n-1} \left|\Delta^{(i)} u(k+1)\right| \Delta^{(n-i-1)}(k+i+1-n)^{n-\ell-1} \le \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)} u(i+1)\right|, \quad (1.24)$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_2}^+$

(1.1)-ის და (1.17)-ის გამოყენებით (1.4)-დან მივიღებთ (1.18).

ანალოგიურად (1.2) ტოლობა, როცა $s = k_2$ და $m = \ell$ გვაძლევს

$$\Delta^{(i)} u(k) \ge \Delta^{(i)} u(k_2) + \frac{1}{(\ell-i-1)!} \sum_{j=k_2}^{k} \prod_{r=1}^{\ell-i-1} (k-j+r-1)\, \Delta^{(\ell)} u(j-1)$$

$(i = 0, \ldots \ell-1)$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_2}^+$.

ამრიგად (1.18)-ის თანახმად მივიღებთ (1.19) პირობას. (1.1_ℓ)-ის გამოყენებით (1.8)-დან, როცა $j = \ell - 1$, $m = n$ და $s = k_2$ გვექნება

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) = \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{i=k_2}^{k} i^{n-\ell} \left|\Delta^{(n)} u(i)\right|$$

$$+ \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{i=\ell}^{n-1} \left|\Delta^{(i)} u(k+1)\right| \Delta^{(n-i-1)}(k+i+1-n)^{n-\ell} +$$

$$+ \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{i=\ell-1}^{n-1} (-1)^{n+i-1} \Delta^{(i)} u(k_2+1) \Delta^{(n-i-1)}(k_2+i+1-n)^{n-\ell}. \quad (1.25)$$

(1.20) პირობის თანახმად არსებობს $k^* > k_2$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=k_2}^{k^*} i^{n-\ell} \left|\Delta^{(n)} u(i)\right| \ge \sum_{i=\ell-1}^{n-1} \left|\Delta^{(n-i-1)}(k_2+i+1-n)^{n-\ell}\right|,$$

ამიტომ (1.25) დან გვაქვს

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \ge \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{i=k^*+1}^{k} i^{n-\ell} \left|\Delta^{(n)} u(i)\right| +$$

$$+ \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{i=\ell}^{n-1} \left|\Delta^{(i)} u(k+1)\right| \Delta^{(n-i-1)}(k+i+1-n)^{n-\ell} \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k^*+1}^+.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან (1.20)-ის თანახმად გვაქვს

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k+1) - (k+\ell+1-n)\Delta^{(\ell)} u(k+1) \to \infty, \qquad \text{როცა } k \to +\infty. \quad (1.26)$$

და (1.24)-ის ძალით სრულდება (1.23) უტოლობა.

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$ და ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}_{k_0}^+$ და $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ აღვნიშნოთ

$$\rho_i(k) = i\Delta^{(\ell-i)} u(k) - (k+1-i)\Delta^{(\ell-i+1)} u(k), \quad (1.27)$$

$$\gamma_i(k) = (k-i)\Delta^{(\ell-i+1)} u(k) - (i-1)\Delta^{(\ell-i)} u(k). \quad (1.28)$$

თუ ვისარგებლებთ (1.26)-ით და ლოპიტალის წესით მივიღებთ

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j)}=+\infty \quad (i=1,\dots,\ell). \tag{1.29}$$

რადგან

$$\Delta^{(1)}\left(\frac{\Delta^{(\ell-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j-1)}\right)=\frac{\gamma_i(k)}{\prod_{j=0}^{i-1}(k-j-1)}, \tag{1.30}$$

ცხადია არსებობს

$$k_\ell>\cdots>k_1>k_0 \text{ ისეთი, რომ } \gamma_i(k_i)>0\ (i=1,\dots,\ell). \tag{1.31}$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში არსებობს $i\in\{1,\dots,\ell\}$ ისეთი, რომ

$$\Delta^{(1)}\left(\frac{\Delta^{(\ell-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j-1)}\right)\le 0 \quad \text{როცა } k\in\mathbb{N}_{k_0}.$$

ამიტომ

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j)}<+\infty.$$

რაც ეწინააღმდეგება (1.29) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ სრულდება (1.31). ამიტომ (1.26)-ის თანახმად $\rho_1(k)\to+\infty$, $\Delta^{(1)}\rho_{i+1}(k)=\rho_i(k)$, $\Delta^{(1)}\gamma_{i+1}(k)=\gamma_i(k)$ და $\gamma_1(k)=(k-1)\Delta^{(\ell)}u(k)>0$ როცა $k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}$ $(i=1,\dots,\ell-1)$. მაშასადამე $\rho_i(k)\to\infty$ და $\gamma_i(k)>0$ როცა $k\in\mathbb{N}_{k_i}^{+}$ $(i=1,\dots,\ell)$. ამიტომ (1.26)-(1.29) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (1.21) პირობა.

მეორეს მხრივ, რადგან $\rho_i(k)\to+\infty$, (1.27)-ის თანახმად, საკმარისად დიდი $k\in\mathbb{N}_{k_0}^{+}$

$$i\Delta^{(\ell-i)}u(k)>(k+1-i)\Delta^{(\ell-i+1)}u(k) \quad (i=1,\dots,\ell),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1.22) ტოლობა.

§2. „ℓ“ ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

მოცემულ პარაგრაფში მიღებულ შედეგებს არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმისათვის, რომ დამტკიცებული იყოს საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** ან **B** თვისება.

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$ და $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$. $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ -ით აღვნიშნოთ სიმრავლე (0.1) განტოლების ამონახსნებისა, რომლებიც აკმაყოფლებენ (1.1_ℓ) პირობას.

მოცემულ პარაგრაფში ვიგულისხმებთ, რომ Fოპერატორი აკმაყოფილებს პირობას

$$|F(u)(k)| \geq p(k)\left|u\big(\sigma(k)\big)\right|^{\lambda} \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}, u \in \mathbf{H}_{k_0,\tau} \tag{2.1}$$

სადაც $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ და

$$0 < \lambda < 1, \qquad \sigma(k) \geq k+1 \text{ როცა } k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

2.1. ‘‘ℓ’’ ტიპის ((1.1_ℓ) ტიპის) ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)) (2.1) და (2.2) პირობებს.

მეორე პარაგრაფის 2.1 პუნქტში დამტკიცებული იქნება ‘‘ℓ’’ ტიპის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს, რომელსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს მომდევნო პარაგრაფებში მიღებული შედეგების დროს.

თეორემა 2.1. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2) პირობები, $\ell \in \{1,2,\dots,n-1\}$ სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}|p(k)| = +\infty. \tag{2.3}$$

გარდა ამისა, თუ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$ −თვის $\boldsymbol{U}_{\ell,\mathrm{k}_0} \neq \emptyset$ მაშინ ნებისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ -თვის და $i \in N$ -თვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\sigma}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left[\rho_{\ell,i}\big(\sigma(k)\big)\right]^{\delta} p(k) < +\infty, \tag{2.4}$$

სადაც

$$\rho_{1,\ell} = \left(\frac{1-\lambda}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

$$\rho_{s,\ell}=\frac{1-\lambda}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{\ell,s-1}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda}\quad (s=2,3,\dots)\qquad (2.5)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $k_0\in\mathbb{N}$ და $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}\neq\emptyset$. $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი $u\in\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ ამონახსნი, რომლიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. (1.1),(2.1) და (2.3) პირობების თანახმად სრულდება (1.20) პირობა. ამრიგად 1.5 ლემის თანახმად სრულდება (1.21)-(1.23) პირობები და (1.22), (1.23)-დან მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq\frac{k}{\ell!\,(\ell-1)!}\sum_{i=k}^{+\infty}i^{n-\ell-1}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(i)\big)\right)^{\lambda}p(i)+$$

$$+\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k}i^{n-\ell}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(i)\big)\right)^{\lambda}p(i)\ \ \text{როცა}\ k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+},\qquad (2.6)$$

სადაც k_* საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია.

თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$\sum_{i=k_*}^{k}u(i)\Delta^{(1)}v(i)=u(k)v(k+1)-\sum_{i=k_*}^{k}v(i)\Delta^{(1)}u(i-1)$$

მაშინ გვექნება

$$\sum_{i=k_*}^{k}i^{n-\ell}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(i)\big)\right)^{\lambda}p(i)=$$

$$=-\sum_{i=k_*}^{k}i\Delta^{(1)}\sum_{s=i}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s)=$$

$$=-k\sum_{s=k}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s)+$$

$$+(k_*-1)\sum_{s=k_*}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s)$$

$$+\sum_{i=k_*}^{k}\sum_{s=i}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s).$$

მაშასადამე (2.6)-დან მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k}\sum_{s=i}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s)\qquad (2.7)$$

როცა $k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+}$.

აღვნიშნოთ

$$x(k)=\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{s=i}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\left(\sigma(s)\right)^{\lambda(\ell-1)}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(s)\big)\right)^{\lambda}p(s).$$

რადგან $\Delta^{(\ell-1)}u(k)$ არაკლებადია და $\sigma(k)\geq k+1$, (2.7)-ის ძალით გვაქვს

$$\Delta^{(1)}x(k)\geq\frac{\left(\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)\right)^{\lambda}}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{s=k}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\left(\sigma(s)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(s)\geq$$

$$\geq\frac{x^{\lambda}(k+1)}{\ell!\,(\ell-1)!}\sum_{s=k}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\left(\sigma(s)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(s)\quad \text{როცა } k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+}.$$

მაშასადამე

$$\sum_{i=k_*}^{k-1}\frac{\Delta^{(1)}x(i)}{x^{\lambda}(i+1)}\geq\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\left(\sigma(j)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(j). \tag{2.8}$$

რადგან

$$\sum_{i=k_*}^{k-1}\frac{\Delta^{(1)}x(i)}{x^{\lambda}(i+1)}=\sum_{i=k_*}^{k-1}x^{-\lambda}(i+1)\int_{x(i)}^{x(i+1)}dt$$

და $x^{-\lambda}(i+1)\leq t^{-\lambda}$ როცა $x(i)\leq t\leq x(i+1)$, გვექნება

$$\sum_{i=k_*}^{k-1}\frac{\Delta^{(1)}x(i)}{x^{\lambda}(i+1)}\leq\sum_{i=k_*}^{k-1}\int_{x(i)}^{x(i+1)}t^{-\lambda}dt=\int_{x(k_*)}^{x(k)}t^{-\lambda}dt.$$

ამრიგად (2.8)-დან მივიღებთ

$$\left(x(k)\right)^{1-\lambda}\geq\frac{(1-\lambda)}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\left(\sigma(j)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(j).$$

მაშასადამე

$$x(k)\geq\left(\frac{(1-\lambda)}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\left(\sigma(j)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}. \tag{2.9}$$

ე.ი. (2.7)-ის თანახმად მივიღებთ $\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq\rho_{1,\ell,k_*}(k)$ როცა $k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+}$, სადაც

$$\rho_{1,\ell,k_*}(k)=\left(\frac{(1-\lambda)}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell}\left(\sigma(j)\right)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}. \tag{2.10}$$

(2.7)-დან (2.10)-ის თანახმად გვაქვს $\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq\rho_{i,\ell,k_*}(k)$ როცა $k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+}$ $(i=2,3,\dots)$ სადაც

$$\rho_{s,\ell,k_*}(k)=\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s-1,\ell,k_*}\big(\sigma(i)\big)\right)^{\lambda}. \qquad (2.11)$$

მეორეს მხრივ, (1.1), (2.2), (2.10) და (2.11) პირობების გათვალისწინებით (2.7)-დან ნებისმიერი $\delta\in[0;\lambda]-$ თვის მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)\geq$$

$$\geq\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_*}^{k}\sum_{j=i}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda-\delta},$$

$$s=1,2,3,\dots$$

და

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)\geq$$

$$\geq\frac{k-k_*}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda-\delta}. \qquad (2.12)$$

ვთქვათ $\delta=\lambda$, მაშინ (2.12) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda}\leq\frac{\ell!\,(n-\ell)!\,(k+1)}{k-k_*}\times\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)}{k+1}.$$

(1.21)-ის პირველი პირობის თანახმად

$$\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda}<+\infty\quad(s=1,2,\dots). \qquad (2.13)$$

ვთქვათ $\delta\in[0;\lambda)$, მაშინ (2.12)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)}{\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda-\delta}}\geq\frac{k-k_*}{\ell!\,(n-\ell)!}$$

როცა $k\in\mathbb{N}_{k_*}^{+}$.

მაშასადამე

$$\frac{\left(\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)\right)^{\lambda-\delta}k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(k)\big)\right)^{\delta}}{\left(\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda-\delta}\right)^{\lambda-\delta}}\geq$$

$$\geq\left(\frac{k-k_*}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\lambda-\delta}k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(k)\big)\right)^{\delta}. \qquad (2.14)$$

აღვნიშნოთ

$$a_k=\sum_{j=k}^{+\infty}j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(j)\big)\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(j)\big)\right)^{\lambda-\delta}. \qquad (2.15)$$

რადგან $\Delta^{(\ell-1)}u(k)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, (2.15)-ის თანახმად (2.14)-დან მივიღებთ

$$\frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^{\lambda-\delta}} \geq \left(\frac{k-k_*}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\lambda-\delta} k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(k)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(k)\big)\right)^{\delta}.$$

ამგვარად, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{i=k_*}^{k} \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i^{\lambda-\delta}} \geq \left(\frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\lambda-\delta} \sum_{i=k_*}^{k} i^{n-\ell-1}(i-k_*)^{\lambda-\delta}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(i)\big)\right)^{\delta}. \tag{2.16}$$

რადგან

$$\sum_{i=k_*}^{k} \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i^{\lambda-\delta}} = \sum_{i=k_*}^{k} a_i^{\delta-\lambda} \int_{a_{i+1}}^{a_i} dt \leq \sum_{i=k_*}^{k} \int_{a_{i+1}}^{a_i} t^{\delta-\lambda} dt \leq \int_0^{a_{k_*}} t^{\delta-\lambda} dt = \frac{a_{k_*}^{1+\delta-\lambda}}{1+\delta-\lambda},$$

ამიტომ (2.16)-დან მივიღებთ

$$\sum_{i=k_*}^{k} i^{n-\ell-1}(i-k_*)^{\lambda-\delta}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(i)\big)\right)^{\delta} \leq$$

$$\leq \frac{a_{k_*}^{1+\delta-\lambda}(\ell!\,(n-\ell)!)^{\lambda-\delta}}{1+\delta-\lambda}. \tag{2.17}$$

ზოგადობის დაურღვევლად (2.15)-ის ძალით ვიგულისხმოთ, რომ $a_{k_*} \leq 1.$ ამრიგად (2.17)-დან მივიღებთ

$$\sum_{i=k_*}^{k} i^{n-\ell-1}(i-k_*)^{\lambda-\delta}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(i)\big)\right)^{\delta} \leq \frac{(\ell!\,(n-\ell)!)^{\lambda-\delta}}{1+\delta-\lambda}. \tag{2.18}$$

(2.13) და (2.18)-ის თანახმად, ნებისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ და $s \in \mathbb{N}$ $-$თვის გვაქვს

$$\sum_{i=k_*}^{k} i^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i)\left(\rho_{s,\ell,k_*}\big(\sigma(i)\big)\right)^{\delta} < +\infty. \tag{2.19}$$

(2.5), (2.10) და (2.11)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\frac{\rho_{s,\ell}(k)}{\rho_{s,\ell,k_*}(k)} \to 1 \quad \text{როცა} \quad k \to +\infty.$$

ამიტომ (2.19)-ის თანახმად სრულდება (2.4) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

2.2. ''ℓ'' ტიპის ((1.1_ℓ) ტიპის) ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)) (2.1) და

$$\boldsymbol{\lambda > 1}, \qquad \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\sigma(k)} = +\infty, \;\; \boldsymbol{p}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+. \qquad (\mathbf{2.20})$$

პირობებს.

მეორე პარაგრაფის 2.2 პუნქტში დამტკიცებული იქნება ''ℓ'' ტიპის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს.

თეორემა 2.2. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1) და (2.20) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და სრულდება (2.3) პირობა. გარდა ამისა თუ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$ −თვის $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$, მაშინ ნებისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ -თვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} \left(\frac{\tilde{\sigma}(k)}{k}\right)^{1+\epsilon} < +\infty \qquad (2.21)$$

სადაც $\varepsilon \in (0;\lambda]$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია,

$$\tilde{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k)\,, & \sigma(k) \le k \\ k, & \sigma(k) > k \end{cases}. \qquad (2.22)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$ და $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$. $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u \in \boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$, რომლიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. (1.1_ℓ), (2.1) და (2.3) პირობების თანახმად სრულდება (1.20) პირობა. ამრიგად 1.5 ლემის თანახმად სრულდება (1.17)-(1.23) პირობები. (1.23) პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \ge \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(i)\right| \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}.$$

ამიტომ (0.1), (2.1) და (1.22)-ის ძალით

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \ge \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell}\, p(i)u^{\lambda}\big(\sigma(i)\big)$$

$$\ge \frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\Big(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\sigma(i)\big)\Big)^{\lambda} p(i).$$

ამრიგად (1.20) და (2.20)-ის თანახმად ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta^{(\ell-1)}u(i) \geq 1$ როცა $i \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$. უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \Big(\Delta^{(\ell-1)}u\big(\tilde{\sigma}(i)\big)\Big)^{1+\epsilon} p(i) =$$

$$= \frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \big(\tilde{\sigma}(i)\big)^{1+\epsilon} \left(\frac{\Delta^{(\ell-1)}u\big(\tilde{\sigma}(i)\big)}{\tilde{\sigma}(i)}\right)^{1+\epsilon} p(i) \qquad (2.23)$$

სადაც $\varepsilon \in (0;\lambda]$.

მეორეს მხრივ გვაქვს

$$\Delta^{(1)}\left(\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k}\right) = \frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)}{k+1} - \frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k} =$$

$$= \frac{k\left(\Delta^{(\ell-1)}u(k+1) - \Delta^{(\ell-1)}u(k)\right) - \Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k(k+1)} = \frac{k\Delta^{(\ell)}u(k) - \Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k(k+1)}.$$

(1.26)-ის თანახმად რადგან $\Delta^{(\ell)}u(k)$ შემოსაზღვრულია, საკმარისად დიდი k-თვის, გვაქვს $\Delta^{(1)}\left(\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k}\right) \leq 0$. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად (2.22)-ის თანახმად ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(\tilde{\sigma}(i))}{\tilde{\sigma}(i)} \geq \frac{\Delta^{(\ell-1)}u(i)}{i}$ $i \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$.

მაშასადამე (2.23)-დან მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell} p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon} \left(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\right)^{1+\epsilon} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}. \qquad (2.24)$$

(2.3)-ის ძალით ცხადია არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=k_0}^{k_1} i^{n-\ell} p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon} \left(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\right)^{1+\epsilon} > 0.$$

ამიტომ (2.24)-დან გვაქვს

$$\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell-1} p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon} \left(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\right)^{1+\epsilon}} \geq \frac{1}{\ell!\,(n-\ell)!} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}$$

მაშასადამე

$$\left(\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-\ell-1}p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon}\big(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\big)^{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon} \geq \frac{1}{(\ell!\,(n-\ell)!)^{1+\epsilon}}\; k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}.$$

ეს უკანასკნელი უტოლობა გავამრავლოთ $k^{n-\ell}p(k)\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(k)}{k}\right)^{1+\epsilon}$ გამოსახულებაზე და განვიხილოთ ჯამი $k_1 -$ დან $k -$ მდე, მივიღებთ

$$\sum_{s=k_1}^{k}\frac{\big(\Delta^{(\ell-1)}u(s)\big)^{1+\epsilon}s^{n-\ell}p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s}\right)^{1+\epsilon}}{\left(\sum_{i=k_0}^{s} i^{n-\ell-1}p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon}\big(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\big)^{1+\epsilon}\right)^{1+\epsilon}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{(\ell!\,(n-\ell)!)^{1+\epsilon}}\sum_{s=k_1}^{k} s^{n-\ell}p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s}\right)^{1+\epsilon}. \qquad (2.25)$$

აღვნიშნოთ

$$a_s = \sum_{i=k_0}^{s} i^{n-\ell-1}p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(i)}{i}\right)^{1+\epsilon}\big(\Delta^{(\ell-1)}u(i)\big)^{1+\epsilon}.$$

მაშინ (2.25) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{s=k_1}^{k}\frac{a_s - a_{s-1}}{(a_s)^{1+\epsilon}} \geq \frac{1}{(\ell!\,(n-\ell)!)^{1+\epsilon}}\sum_{s=k_1}^{k} s^{n-\ell}p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s}\right)^{1+\epsilon} \quad k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}. \quad (2.26)$$

რადგან

$$\sum_{s=k_1}^{k}(a_s)^{-1-\epsilon}(a_s - a_{s-1}) = \sum_{s=k_1}^{k}(a_s)^{-1-\epsilon}\int_{a_{s-1}}^{a_s} dt \leq \sum_{s=k_1}^{k}\int_{a_{s-1}}^{a_s} t^{-1-\epsilon}dt =$$

$$= \int_{a_{k_1-1}}^{a_k} t^{-1-\epsilon}dt = \frac{a_{k_1-1}^{-\epsilon}}{\epsilon} - \frac{a_k^{-\epsilon}}{\epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon a_{k_1-1}} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}.$$

ამიტომ (2.26) უტოლობიდან გვაქვს

$$\sum_{s=k_1}^{k} s^{n-\ell}p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s}\right)^{1+\epsilon} \leq \frac{(\ell!\,(n-\ell)!)^{1+\epsilon}}{\epsilon a_{k_1-1}} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}.$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $k \to +\infty$ მივიღებთ

$$\sum_{s=k_1}^{+\infty} s^{n-\ell}p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s}\right)^{1+\epsilon} < +\infty. \qquad (2.27)$$

სადაც $\tilde{\sigma}$ მოცემულია (2.22) ტოლობით. (2.27)-დან ცხადია გამომდინარეობს (2.21) უტოლობა.

$2.3.$ ‘‘ℓ’’ ტიპის ((1.1_ℓ) ტიპის) ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)) (2.1) და

$$\mathbf{0 < \lambda < 1}, \qquad \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\sigma(k)} = +\infty, \;\; \boldsymbol{p}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+. \tag{2.28}$$

პირობებს.

მეორე პარაგრაფის 2.3 პუნქტში დამტკიცებული იქნება ‘‘ℓ’’ ტიპის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი პირობა, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს.

თეორემა 2.3. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1) და (2.28) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და სრულდება (2.3) პირობა. გარდა ამისა თუ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$ −თვის $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1} (\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)} \big(\widetilde{\sigma}(k)\big)^{\lambda} \, p(k) < +\infty, \tag{2.29}$$

სადაც $\widetilde{\sigma}$ მოცემულია (2.22) ტოლობით.

დამტკიცება. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$ და $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$. $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u \in \boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$, რომლიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. (1.1),(2.1) და (2.3) პირობების თანახმად სრულდება(1.20) პირობა. ამრიგად ლემა 1.5-ის თანახმად სრულდება (1.17)-(1.23) პირობები. (1.23) პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \geq \frac{k}{(n-\ell)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1} \left|\Delta^{(n)} u(i)\right| \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}.$$

ამიტომ (0.1), (2.1) და (1.22)-ის ძალით

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \geq \frac{k}{\ell!\,(n-\ell)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1} \, p(i) \big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \big(\Delta^{(\ell-1)} u\big(\sigma(i)\big)^{\lambda}.$$

ე.ი., რადგან $\Delta^{(\ell-1)} u(k)$ არაკლებადია და $\tilde{\sigma}(k) \leq k$,

$$Y(k) \geq \frac{\tilde{\sigma}(k)}{\ell!\,(n-\ell)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1} \, p(i) \big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \big(Y(i)\big)^{\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}, \tag{2.30}$$

სადაც $Y(k) = \Delta^{(\ell-1)} u\big(\tilde{\sigma}(k)\big)$.

(2.30)-დან გვაქვს

$$\frac{Y^{\lambda}(k)}{\left(\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1} \, p(i) \big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} \big(Y(i)\big)^{\lambda}\right)^{\lambda}} \geq \left(\frac{\tilde{\sigma}(k)}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\lambda} \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}.$$

მაშასადამე

$$\frac{Y^{\lambda}(k)\,k^{n-\ell-1}\,p(k)\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}}{\Big(\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\,p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\big(Y(i)\big)^{\lambda}\ \Big)^{\lambda}} \geq \left(\frac{\tilde{\sigma}(k)}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\lambda} k^{n-\ell-1}\,p(k)\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}.$$

ე.ი.

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{Y^{\lambda}(s)\,s^{n-\ell-1}\,p(s)\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}}{\Big(\sum_{i=s}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\,p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\big(Y(i)\big)^{\lambda}\ \Big)^{\lambda}}$$

$$\geq \frac{1}{(\ell!\,(n-\ell)!)^{\lambda}} \sum_{s=k_0}^{k} \big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)} s^{n-\ell-1}\,p(s)\big(\tilde{\sigma}(s)\big)^{\lambda}.$$

ვთქვათ

$$a_k = \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\,p(i)\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}\big(Y(i)\big)^{\lambda}\,.$$

მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{a_s - a_{s+1}}{(a_s)^{\lambda}} \geq \frac{1}{(\ell!\,(n-\ell)!)^{\lambda}} \sum_{s=k_0}^{k} s^{n-\ell-1}\,p(s)\big(\tilde{\sigma}(s)\big)^{\lambda}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)}. \qquad (2.31)$$

მეორეს მხრივ

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{a_s - a_{s+1}}{(a_s)^{\lambda}} = \sum_{s=k_0}^{k} (a_s)^{-\lambda} \int_{a_{s+1}}^{a_s} dt \leq \sum_{s=k_0}^{k} \int_{a_{s+1}}^{a_s} t^{-\lambda} dt \leq \int_0^{a_{k_0}} t^{-\lambda} dt = \frac{a_{k_0}^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

ამიტომ (2.31)-დან მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{k} s^{n-\ell-1}\,p(s)\big(\tilde{\sigma}(s)\big)^{\lambda}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)} < (\ell!\,(n-\ell)!)^{\lambda} \frac{a_{k_0}^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\,p(s)\big(\tilde{\sigma}(s)\big)^{\lambda}\big(\sigma(s)\big)^{\lambda(\ell-1)} < +\infty.$$

რაც ამტკიცებს, რომ სრულდება (2.29) უტოლობა.

§3. დადებითი ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები

მესამე პარაგრაფში მტკიცდება საკმარისი პირობები იმისა რომ (0.1) განტოლებას არ გააჩნია „ℓ“ ტიპის ამონახსნები.

3.1. „ℓ“ ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები, როცა Fოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2), $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) პირობებს.

მოცემულ პუნქტში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას არ გააჩნდეს „ℓ“ ტიპის ამონახსნები, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს.

თეორემა 3.1. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2) (2.3) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$ და $s \in \mathbb{N}-$თვის.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}\left[\rho_{\ell,s}\big(\sigma(k)\big)\right]^{\delta}|p(k)| = +\infty, \tag{3.1}$$

სადაც $\rho_{s,\ell}$ ფუნქციები მოცემულია (2.5) ტოლობებით. მაშინ $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0,} = \emptyset,$ ნებისმიერი$k_0 \in \mathbb{N}-$თვის.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი რომ $\mathbf{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$. ამრიგად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u{:}\,\mathbb{N}^+_{k_0} \to \mathbb{R}^+$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. მეორეს მხრივ, რადგან სრულდება 2.1 თეორემის პირობები, ნებისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ და $s \in \mathbb{N}-$ თვის სრულდება (2.4) უტოლობა, რაც ეწინააღმდეგება (3.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.1. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და რომელიმე $\gamma \in (\lambda;1)-$თვის

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{\gamma}\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(i) > 0\,. \tag{3.2}$$

გარდა ამისა, რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]-$თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)+\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}}p(k) = +\infty, \tag{3.3}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. ცხადია (3.2)-ის თანახმად სრულდება (2.3) პირობა. მეორეს მხრივ (2.5)-ის ძალით არსებობს $c > 0$ და $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ ისეთი რომ

$$\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i) > ck^{-\gamma} \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}. \tag{3.4}$$

ამიტომ

$$\sum_{i=k_1}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(j) > c\sum_{i=k_1}^{k} i^{-\gamma} = c\sum_{i=k_1}^{k} i^{-\gamma}\int_i^{i+1} dt \geq c\sum_{i=k_1}^{k}\int_i^{i+1} t^{-\gamma}dt =$$

$$= c\int_{k_1}^{k} t^{-\gamma}dt = \frac{c}{1-\gamma}\left(k^{1-\gamma} - k_1^{1-\gamma}\right).$$

მაშასადამე არსებობს $c_1 \in (0; c)$ და $k_2 \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=k_1}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(j) \geq c_1 k^{1-\gamma} \quad \text{როცა } \mathrm{k} \in \mathbb{N}_{k_2}^{+}.$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ (2.5) პირობას მივიღებთ

$$\rho_{1,\ell}(k) \geq \left(\frac{c_1(1-\lambda)}{\ell!\,(n-\ell)!}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} k^{\frac{1-\gamma}{1-\lambda}} \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_2}^{+}. \tag{3.5}$$

მაშასადამე (3.3) და (3.5) პირობების თანახმად, ცხადია, სრულდება (3.1) პირობა, როცა s=1. ამიტომ სრულდება 3.1 თეორემის ყველა პირობა, რაც ამტკიცებს 3.1 შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 3.2. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და

$$\liminf_{k\to+\infty} k\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-\ell-1}\big(\sigma(i)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(i) > 0\,.$$

გარდა ამისა, რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$ −თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}(\ln\sigma(k))^{\delta} p(k) = +\infty.$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

თეორემა 3.2. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.2) (3.2) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და რომელიმე $\alpha \in (1; +\infty)$ −თვის

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{\sigma(k)}{k^{\alpha}} > 0\,. \tag{3.6}$$

გარდა ამისა, თუ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან

$$\alpha\lambda \geq 1 \quad ან \quad \alpha\lambda < 1 \tag{3.7}$$

და რომელიმე $\epsilon > 0$ −თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda}-\epsilon}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k) = +\infty. \tag{3.8}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ რომელიმე $s \in \mathbb{N}$-თვის და $\delta = \lambda$-თვის სრულდება (3.1) პირობა. (3.2) და (3.6)-ის თანახმად არსებობს $\alpha > 1,\ \gamma \in [\lambda, 1),\ c > 0$ და $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$k^{\gamma}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(j) \geq c \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+} \tag{3.9}$$

და

$$\sigma(k) \geq ck^{\alpha} \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{\mathrm{k}_0}^{+}. \tag{3.10}$$

(2.5) და (3.9) პირობების თანახმად ცხადია, რომ $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho_{1,\ell}(k) = +\infty$. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\rho_{1,\ell}(k) \geq 1$, როცა $\mathrm{k} \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$.

$$\rho_{2,\ell}(k) \geq \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{-\gamma} = \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{-\gamma}\int_i^{i+1} dt \geq$$

$$\geq \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k}\int_i^{i+1} t^{-\gamma}\,dt = \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!}\int_{k_0}^{k} t^{-\gamma}\,dt = \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!\,(1-\gamma)}\big(k^{1-\gamma} - k_0^{1-\gamma}\big).$$

შევარჩიოთ $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}$ ისე, რომ

$$\rho_{2,\ell}(k) \geq \frac{c}{\ell!\,(n-\ell)!\,(1-\gamma)}k^{1-\gamma} \quad \text{როცა} \quad k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}.$$

ამრიგად, (3.9) და (3.10) თანახმად (2.5)-დან, როცა s=3 გვაქვს

$$\rho_{3,\ell}(k) \geq \left(\frac{c}{2\ell!\,(n-\ell)!\,(1-\gamma)}\right)^{(1+\lambda)} k^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda)} \quad \textit{როცა} \quad k \in \mathbb{N}_{k_2}^{+},$$

სადაც $k_2 \in \mathbb{N}_{k_1}$ საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია. მაშასადამე, ნებისმიერი $s \in \mathbb{N}$ −თვის, არსებობს $k_s \in \mathbb{N}$ ისეთი რომ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_s}^{+}$

$$\rho_{s,\ell}(k) \geq \left(\frac{c}{2\ell!\,(n-\ell)!\,(1-\gamma)}\right)^{\left(1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-2}\right)}, \quad \text{როცა } k \geq k_s. \tag{3.11}$$

ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (3.7)-ის პირველი პირობა. შევარჩიოთ $s_0 \in \mathbb{N}$ ისე რომ $(1-\gamma)(s_0-1) \geq \frac{1}{\lambda}$. მაშინ (3.11) უტოლობის თანახმად $\rho_{s_0,\ell}(k) \geq c_0 k$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_{s_0}}^{+}$, სადაც $c_0 > 0$. ამიტომ (3.10)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (3.1) პირობა, როცა

$\delta = \lambda$ და $s = s_0$. ე.ი. როცა სრულდება (3.7) პირობა მტკიცდება თეორემის სამართლიანობა.

ვიგულისხმოთ, რომ $0 < \alpha\lambda < 1$ და სრულდება (3.8) პირობა. ვთქვათ $\epsilon > 0$ და შევარჩიოთ $s_0 \in \mathbb{N}$ ისე, რომ

$$\rho_{s_0,\ell}(k) \geq c_1 k^{\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda}-\epsilon} \quad \textit{როცა}\ k \in \mathbb{N}^+_{k_{s_0}},$$

სადაც $c_1 > 0$. მაშასადამე (3.8) ძალით სრუდება (3.1) პირობა როცა $s = s_0$. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

3.2. „ℓ" ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები, როცა Fოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.20), $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) პირობებს.

მოცემულ პუნქტში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას არ გააჩნია „ℓ" ტიპის ამონახსნი, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს.

თეორემა 3.3. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.20) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და სრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} \left(\frac{\tilde{\sigma}(k)}{k}\right)^{1+\epsilon} p(k) = +\infty, \tag{3.12}$$

სადაც $\epsilon > 0$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ხოლო $\tilde{\sigma}(k)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (2.22) ტოლობით. მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის, $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი რომ $\mathbf{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$. ამრიგად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}^+_{k_0} \to \mathbb{R}^+$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. მეორეს მხრივ, რადგან სრულდება 2.2 თეორემის პირობები, ამიტომ სრულდება (2.21) პირობა. რაც ეწინააღმდეგება (3.12) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

3.3 თეორემიდან (2.22) პირობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს შემდეგი

შედეგი 3.3. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.20) პირობები, სადაც $\sigma(k) \leq k$ როცა $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და ნებისმიერი $\epsilon > 0$ მცირე რიცხვისთვის სრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1-\epsilon}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)+1+\epsilon} p(k) = +\infty, \tag{3.13}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

3.3. „ℓ'' ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები, როცა Fოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.28), $\boldsymbol{\ell + n}$ კენტია ($\boldsymbol{\ell + n}$ ლუწია) პირობებს.

მოცემულ პუნქტში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას არ გააჩნია „ℓ'' ტიპის ამონახსნი, როცა F ოპერატორი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს.

თეორემა 3.4. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.28) პირობები, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და სრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}\big(\tilde{\sigma}(k)\big)^{\lambda} p(k) = +\infty, \tag{3.14}$$

სადაც $\tilde{\sigma}(k)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (2.22) პირობით. მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი რომ $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0} \neq \emptyset$. $\boldsymbol{U}_{\ell,k_0}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. მეორეს მხრივ, რადგან სრულდება 2.3 თეორემის პირობები, ამიტომ სრულდება (2.29) პირობა. რაც ეწინააღმდეგება (3.14) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

უკანასკნელი თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 3.4. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1), (2.28) პირობები, სადაც $\sigma(k) \leq k$ როცა $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda\ell} p(k) = +\infty. \tag{3.15}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის $\mathbf{U}_{\ell,k_0} = \emptyset$.

§4. მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებები **A** ან **B** თვისებით

ამ პარაგრაფში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** ან **B** თვისება. ამისათვის ძირითადად გამოყენებული იქნება მე-3 პარაგრაფში მიღებული შედეგები.

4.1. წინსწრებულ არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები A თვისებით

მოცემულ პუნქტში დამტკიცებული იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** თვისება, როცა სრულდება (0.2), (2.1) და (2.2) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებული იქნება მეორე პარაგრაფის 2.1 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.1. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.2), (2.3) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ -თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია და რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$ და $s \in \mathbb{N}$ სრულდება (3.1) პირობა. გარდა ამისა კენტი n-ის შემთხვევაში, თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1}p(k) = +\infty, \tag{4.1}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.2)-ის და 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0,2,..,n-1\}$ ისეთი, რომ $\ell + n$ კენტია და სრულდება (1.1) პირობა. რადგან ნებისმიერი $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ -თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია, სრულდება (3.1) პირობა, ამიტომ 3.1 თეორემის თანახმად ნებისმიერი $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ -თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია, ჩვენ გვაქვს $\ell \notin \{1,2,..,n-1\}$. მაშასადამე n არის კენტი და $\ell = 0$. ამ შემთხვევაში საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. თუ დავუშვებთ, რომ არ სრულდება (0.4) პირობა მაშინ (1.1)-ის თანახმად მოიძებნება c>0 ისეთი, რომ $u(k) \geq c$ საკმარისად დიდი k-სთვის. ამიტომ რადგან $\ell = 0$, (2.1) და (0.2)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j) + c\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}p(j) \leq 0 \tag{4.2}$$

სადაც $k_0 \in \mathbb{N}$ საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია.

მეორეს მხრივ

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j) = k^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(k+1) - (k_0-1)^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(k_0) -$$

$$-\sum_{j=k_0}^{k}\Delta^{(1)}(j-1)^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(j). \tag{4.3}$$

(4.3) ტოლობა სამართლიანია როცა $k = k_0$ და ცხადია შემდეგი ტოლობა

$$\Delta^{(1)}\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j) =$$

$$=\Delta^{(1)}\left(k^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(k+1)-(k_0-1)^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(k_0)-\sum_{j=k_0}^{k}\Delta^{(1)}(j-1)^{n-1}\Delta^{(n-1)}u(j)\right).$$

თუ ანალოგიურ წარმოდგენას გამოვიყენებთ (4.3) ტოლობის ბოლო შესაკრებზედა გავაგრძელებთ ამ პროცესს საბოლოოდ მივიღებთ

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta^{(j)}(k-j)^{n-1}\Delta^{(n-j-1)}u(k+1) -$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j(k_0-j-1)^{n-j-1}\Delta^{(n-j-1)}u(k_0). \tag{4.4}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\ell = 0$, n კენტია და სრულდება (1.1) პირობა, (4.2) უტოლობიდან მივიღებთ

$$c\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}p(j) \le \sum_{j=0}^{n-1}(k_0-j-1)^{n-j-1}\left|\Delta^{(n-j-1)}u(k_0)\right|.$$

მაშასადამე

$$\sum_{j=k_0}^{+\infty} j^{n-1}p(j) < +\infty.$$

უკანასკნელი უტოლობა ეწინააღმდეგება (4.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $\lim\limits_{k\to+\infty} u(k) = 0$. მაშასადამე სრულდება (0.4) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.1-დან როცა $\delta = 0$ გამომდინარეობს

შედეგი 4.1. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.2), პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$-თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}p(k) = +\infty. \tag{4.5}$$

გარდა ამისა, თუ n კენტია და სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

თეორემა 4.2. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.2), (2.3) და კენტი n-ის შემთხვევაში (4.1) პირობები. გარდა ამისა

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{\big(\sigma(k)\big)^{\lambda}}{k} > 0 \tag{4.6}$$

მაშინ ლუწი n-ის შემთხვევაში თუ სრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2+\lambda}p(k) = +\infty \tag{4.7}$$

ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-3+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda}p(k) = +\infty, \tag{4.8}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

დამტკიცება. (4.6) პირობის თანახმად არსებობს $c > 0$ და $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\sigma^{\lambda}(k) \geq ck \ \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}^{+}. \tag{4.9}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა n ლუწია და სრულდება (4.7) პირობა. გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2+\lambda}p(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}k^{\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k)\big(\sigma(k)\big)^{-\lambda(\ell-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\left(\frac{k}{\sigma^{\lambda}(k)}\right)^{\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k),$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.9) და (4.7) პირობებს უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k) \geq \frac{1}{c^{\ell-1}}\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2+\lambda}p(k).$$

მაშასადამე ნებისმეირი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ სადაც ℓ კენტია (4.7)-ის თანახმად გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)}p(k) = +\infty.$$

მაშასდამე ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება 4.1 თეორემის პირობები. ამიტომ ლუწი n-ის შემთხვევაში თეორემის სამართლიანობა დამტკიცებულია. ანალოგიურად, კენტი n-ის შემთხვევაში (4.8) და (4.1)-ის ძალით ვაჩვენებთ, რომ სრულდება 4.1 თეორემის პირობები.

თეორემა 4.3. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.2) პირობები და

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{\big(\sigma(k)\big)^{\lambda}}{k} < +\infty \tag{4.10}$$

მაშინ იმისათვის რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** თვისება საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-2)} p(k) = +\infty. \tag{4.11}$$

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ. რომ სრულდება 4.1 თეორემის პირობები. (4.10) პირობის თანახმად არსებობს $\mathrm{c} > 0$ და $\mathrm{k}_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\frac{\sigma^{\lambda}(k)}{k} \le c \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}^{+}_{\mathrm{k}_0}. \tag{4.12}$$

ვთქვათ $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$. მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-2)} k^{n-\ell-1}\big(\sigma(k)\big)^{-\lambda(n-\ell-1)} p(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-2)} \left(\frac{k}{\sigma^{\lambda}(k)}\right)^{n-\ell-1} p(k).$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.12)-ს მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(k) \ge \left(\frac{1}{c}\right)^{n-\ell-1} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-2)} p(k).$$

ამიტომ (4.11)-ის თანახმად გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(\ell-1)} p(k) = +\infty, \tag{4.13}$$

სადაც $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, $\ell + n$ კენტია.

მეორეს მხრივ რადგან $0 < \lambda < 1$, (4.13)-დან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (4.1) პირობა. ე.ი. სრილდება 4.1 თეორემის პირობები, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.4. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.2), (3.6) და (4.6) პირობები. გარდა ამისა არსებობს $\gamma \in [\lambda; 1)$ ისეთი, რომ

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{\gamma} \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-2} p(j) > 0 \tag{4.14}$$

როცა n ლუწია და

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{\gamma} \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-3}\big(\sigma(j)\big)^{\lambda} p(j) > 0, \tag{4.15}$$

როცა n კენტია სრულდება (4.1) პირობა. მაშინ იმისათვის რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** თვისება საკმარისია შესრულდეს ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან: $\alpha\lambda \geq 1$ ან $\alpha\lambda < 1$ და როცა n ლუწია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2+\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda}-\epsilon} p(k) = +\infty, \tag{4.16}$$

და როცა n კენტია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2-\lambda+\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda}-\epsilon} \big(\sigma(k)\big)^{\lambda} p(k) = +\infty, \tag{4.17}$$

სადაც ϵ რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.2) და (1.1) ლემის თანახმად არსებობ $\ell \in \{0, \dots, \mathrm{n}-1\}$, ისეთი რომ $\ell + \mathrm{n}$ კენტია და სრულდება (1.1) პირობა. თუ გავითვალისწინებთ (4.14) და (4.6) ((4.15) და (4.6)) მარტივად დარწმუნდებით, რომ ნებისმიერი $\ell \in \{\overline{1, \mathrm{n}-1}\}$ –თვის, სადაც $\ell + \mathrm{n}$ კენტია და სრულდება (3.2) პირობები. მეორეს მხრივ (4.16) და (4.6) ((4.17) და (4.6)) თანახმად ცხადია, რომ ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, \mathrm{n}-1\}$ სადაც $\ell + \mathrm{n}$ კენტია სრულდება (3.8) პირობა. მაშასადამე ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, \mathrm{n}-1\}$ სადაც $\ell + \mathrm{n}$ კენტია სრულდება 3.2 თეორემის პირობები. ამიტომ $\ell \notin \{1, \dots, \mathrm{n}-1\}$ მაშასადამე $\ell = 0$. ამ შემთხვევაში, (4.1)-ის ძალით თეორემა 4.1-ის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.1 და შედეგი 3.2 -ის გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 4.5. ვთქვათ სრულდება (0.2) (2.1), (2.2), (4,6) და (4.14) პირობები. გარდა ამისა თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2} \big(\sigma(k)\big)^{\frac{(1-\gamma)\lambda}{1-\lambda}} p(k) = +\infty,$$

სადაც $\gamma \in (\lambda; 1)$. მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

თეორემა 4.6. ვთქვათ სრულდება პირობები (0.2), (2.1) (2.2), (4.6) და

$$\liminf_{k \to +\infty} k \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-2} p(j) > 0.$$

გარდა ამისა თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2}(\ln\sigma(k))^{\lambda}p(k) = +\infty,$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

4.2. გადახრილ არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები A თვისებით, როცა მინორანტის ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე მეტია.

მოცემულ პუნქტში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს $\mathbf{A}$ თვისება როცა სრულდება (0.2), (2.1) და (2.20) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებული იქნება 2.2 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.7. ვთქვათ $F \in \mathbf{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1) და (2.20) პირობები. $\ell \in \{1, \dots, \mathrm{n}-1\}$ −თვის, სადაც $\ell + \mathrm{n}$ კენტია სრულდება (3.12) პირობები. გარდა ამისა თუ კენტი n-ის შემთხვევაში თუ სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u: \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.2) და 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, ისეთი რომ $\ell + n$ კენტია და სრულდება (1.1) პირობა. რადგან ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ −თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია და სრულდება (3.12) პირობა, სადაც ϵ რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია, ამიტომ $\ell \notin \{1, \dots, n-1\}$. ე.ი. $\ell = 0$ და n კენტია. ამ შემთხვევაში (4.1)-ის თანახმად 4.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.8. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1) და (2.20) პირობები. *ნებისმიერი* $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$-თვის სრულდება (3.13) პირობები. გარდა ამისა კენტი n-ის შემთხვევაში თუ სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

თეორემა 4.9. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.20), (4.6) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2-\epsilon}\big(\sigma(k)\big)^{1+\epsilon}p(k) = +\infty, \tag{4.18}$$

სადაც ϵ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. გარდა ამისა თუ სრულდება (4.1) პირობა კენტი n-ის შემთხვევაში, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.6) და (4.18)-დან გამომდინარეობს (3.13) პირობები ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც$\ell + n$ კენტია.

თეორემა 4.10. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.20), (4.10) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\sigma(k))^{\lambda(n-2)+1} \left(\frac{\sigma(k)}{k}\right)^{\epsilon} p(k) = +\infty, \tag{4.19}$$

სადაც ϵ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.10) და (4.19)-ის თანახმად სრულდება (3.13) ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია.

4.3. გადახრილ არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები A თვისებით, როცა F ოპერატორის ფაზური კოორდინატის მაჩვენებელი ერთზე ნაკლებია.

ამ პუნქტში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს $\mathbf{A}$ თვისება, როცა სრულდება (0.2), (2.1) და (2.28) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებული იქნება 2.3 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.11. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1) და (2.28) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია სრულდება (3.14) პირობა, სადაც $\tilde{\sigma}$ ფუნქცია მოცემულია (2.22) ტოლობით. გარდა ამისა კენტი n-ის შემთხვევაში თუ სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u: \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.2) და 1.1 ლემის თანახმად არსებობ $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, ისეთი რომ $\ell + \mathrm{n}$ კენტია და სრულდება (1.1) პირობა. 3.4 თეორემის თანახმად, რადგან ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ −თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია და სრულდება (3.14) პირობა, ამიტომ $\ell \notin \{1, \dots, n-1\}$. ე.ი. $\ell = 0$ და n კენტია. ამიტომ (4.1)-ის თანახმად 4.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

თეორემა 4.12. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1) და (2.28) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია სრულდება (3.15) პირობა, სადაც $\sigma(k) \leq k$. მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ რადგან $\sigma(k) \leq k$ და $0 < \lambda < 1$, (3.15)-დან გამომდინარეობს (4.1) პირობა.

თეორემა 4.13. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.28), (4.6) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda} p(k) = +\infty, \tag{4.20}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.6) და (4.20)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (3.15) პირობები ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\} -$თვის, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.14. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.2), (2.1), (2.28) და (4.10)პირობები, $\sigma(k) \leq k$ და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\sigma(k))^{\lambda(n-1)} p(k) = +\infty. \tag{4.21}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.10) და (4.21)-ის თანახმად სრულდება (3.15), ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია.

4.4. წინსწრებული არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები B თვისებით

ამ პუნქტში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება, როცა სრულდება (0.3), (2.1) და (2.2) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებული იქნება მეორე პარაგრაფის 2.1 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.15. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.2), (2.3) (4.21)პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots \mathrm{n}-2\} -$თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია და რომელიმე $\delta \in [0; \lambda]$ და $s \in \mathbb{N} -$თვის სრულდება (3.1) პირობა, სადაც $\rho_{s,\ell}$ ფუნქცია მოცემულია (2.5) ტოლობით. გარდა ამისა თუ კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.1), მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1) (0.3)-ის და 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0 \dots . n\}$ ისეთი, რომ $\ell + n$ ლუწია და სრულდება (1.1) პირობა. რადგან სრულდება 3.1 თეორემის

პირობები, ამიტომ $\ell \notin \{1,2,\dots,n-2\}$, სადაც $\ell+n$ ლუწია. მაშასადამე ან $\ell = n$ ან $\ell = 0$ და n ლუწია. იმ შემთხვევაში როცა $\ell = 0$, (4.1)-ის თანახმად, 4.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა.

ვთქვათ $\ell = n.$ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (0.5) პირობა. (1.1)-დან გვაქვს $u(\sigma(k)) \geq c\big(\sigma(k)\big)^{n-1}$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}^{+}$, სადაც $c > 0$ და $k_1 > k_0$ საკმარისად დიდი რიცხვია. ამიტომ (4.21), (0.1), (2.1) პირობების თანახმად გვაქვს

$$\Delta^{(n-1)}u(k) \geq \Delta^{(n-1)}u(k_1) + c\sum_{j=k_1}^{k} p(j)\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(n-1)} \to +\infty \quad \text{როცა} \;\; k \to +\infty.$$

ე.ი. (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

თეორემა 4.15-დან როცა $\delta = 0$ ცხადია გამომდინარეობს

თეორემა 4.16. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.2), (2.3) (4.21) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots \mathrm{n}-2\}$ –თვის სადაც $\ell+n$ ლუწია, სრულდება (4.5) პირობა. მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

თეორემა 4.17. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.2), (4.6) პირობები. გარდა ამისა თუ კენტი n-ის შემთხვევაში (ლუწი n-ის შემთხვევაში) სრულდება (4.7) ((4.8)) და (4.1)) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (2.3) და (4.21) პირობა.

თეორემა 4.18. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.2), (4.10) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-1)} p(k) = +\infty, \tag{4.22}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. (4.10)-ის თანახმად (4.22)-დან გამომდინარეობს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{2+\lambda}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-3)} p(k) = +\infty.$$

ამიტომ ცხადია რომ სრულდება 4.16 თეორემის ყველა პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

4.9 თეორემა და 4.15 თეორემის დამტკიცებიდან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 4.19. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.2), (3.6), (4.6), (4.21) პირობები. გარდა ამისა არსებობს $\gamma \in [\lambda; 1)$ ისეთი, რომ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.14), ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.15) პირობა. მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება საკმარისია შესრულდეს ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან $\alpha\lambda \geq 1$ ან თუ $\alpha\lambda < 1$ მაშინ კენტი n-ის შემთხვევაში შესრულდეს (4.16) და ლუწი n-ის შემთხვევაში (4.17) პირობა, სადაც ϵ რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

4.5 თეორემის ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 4.20. ვთქვათ სრულდება (0.3) (2.1) (2.2) (4.10) და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-1)} |p(k)| = +\infty$$

პირობები.

გარდა ამისა თუ

$$\liminf_{k \to +\infty} k \sum_{j=k}^{+\infty} j\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(n-3)} |p(j)| > 0$$

და

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j\big(\sigma(j)\big)^{\lambda(n-3)} \Big(ln\big(\sigma(j)\big)\Big)^{\lambda} = +\infty,$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

4.5 გადახრილ არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები B თვისებით, როცა F ოპერატორის მინორანტის ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი ერთზე მეტია.

მოცემულ პუნქტში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება, როცა სრულდება (0.3), (2.1) და (2.20) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებულია მეორე პარაგრაფის 2.2 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.21. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.20), (4.22), პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-2\}$ −თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, სრულდება (3.12) პირობა. გარდა ამისა თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u: \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.3) და 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0, \dots, \mathrm{n}\}$ისეთი, რომ სრულდება (1.1) პირობები, სადაც $\ell + n$ ლუწია. რადგან სრულდება (3.12) პირობა ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-2\}$ −თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, ამიტომ 3.3 თეორემის თანახმად გვაქვს $\ell \notin \{1, \dots, n-2\}$. მაშასადამე $\ell = \mathrm{n}$ ან n ლუწია და $\ell = 0$. თუ $\ell = n$ მაშინ 4.13 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.5) პირობა. დავუშვათ n ლუწია და$\ell = 0$, მაშინ 4.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

4.21 თეორემიდან (2.22)-ის თანახმად მარტივად გამომდინარეობს

შედეგი 4.2. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.20),(4.22),პირობები,$\sigma(k) \le k$ როცა $k \in \mathbb{N}$, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-2\}$ − თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, სრულდება (3.13) პირობა. გარდა ამისა თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.1) პირობა,მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

თეორემა 4.22. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.20),(4.6) და (4.22), პირობები, $\sigma(k) \le k$ როცა $k \in \mathbb{N}$. მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება საკმარისია კენტი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2-\epsilon} \big(\sigma(k)\big)^{1+\epsilon} |p(k)| = +\infty, \tag{4.23}$$

ხოლო ლუწი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-3-\epsilon} \big(\sigma(k)\big)^{\lambda+1+\epsilon} |p(k)| = +\infty \tag{4.24}$$

და სრულდება (4.1) პირობა.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.23),(4.24) და (4.6) პირობების თანახმად სრულდება 4.21 თეორემის ყველა პირობა.

თეორემა 4.23. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.20), (4.10) და (4.22), პირობები. გარდა ამისა თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{1-\epsilon} \big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-3)+1+\epsilon} |p(k)| = +\infty \tag{4.25}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ (4.10) და (4.25) პირობების ძალით სრულდება 4.21 თეორემის ყველა პირობა. ესე იგი ვღებულობთ უკანასკნელი თეორემის სამართლიანობას.

4.6. გადახრილ არგუმენტიანი დისკრეტული განტოლებები B თვისებით, როცა F ოპერატორის მინორანტის ფაზური კოორდინატის ხარისხის მაჩვენებელი ერთზე ნაკლებია.

მოცემულ პუნქტში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება, როცა სრულდება (0.3), (2.1) და (2.28) პირობები, სადაც არსებითად გამოყენებულია მეორე პარაგრაფის 2.3 პუნქტში მიღებული შედეგები.

თეორემა 4.24. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.28), (4.22) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-2\}-$თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, სრულდება (3.12) პირობა. გარდა ამისა თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ(0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u\colon \mathbb{N}_{k_0}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$. მაშინ (0.1), (0.3) და 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0, \dots, n\}$ ისეთი, რომ სრულდება (1.1) პირობები, სადაც $\ell + n$ ლუწია. რადგან სრულდება (3.12) პირობა ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, \mathrm{n}-2\}-$თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, ამიტომ $\ell \notin \{1, \dots, n-2\}$. მაშასადამე $\ell = n$ ან n ლუწია და $\ell = 0$. თუ $\ell = n$ მაშინ 4.15 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.5) პირობა. ხოლო თუ n ლუწია და $\ell = 0$, მაშინ (4.1)-ის თანახმად, 4.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

თეორემა 4.25. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.28), (4.22) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1, \dots, n-2\}-$თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია, სრულდება (3.15) პირობა. გარდა ამისა თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (4.1) პირობა, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ (2.22) და (3.15) პირობებიდან გამომდინარეობს (3.14) პირობა.

თეორემა 4.26. ვთქვათ $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$, სრულდება (0.3), (2.1), (2.28) პირობები,$\sigma(k) \leq k$ როცა $k \in \mathbb{N}$ და

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sigma(k)\big)^{\lambda(n-1)}|p(k)| = +\infty, \tag{4.26}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. რადგან $\sigma(k) \le k$ და $0 < \lambda < 1$, (4.26)-ის თანახმად სრულდება 4.25 თეორემის პირობები.

თავი 2

მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა

მეორე თავში განხილული იქნება შემდეგი სხვაობიანი განტოლება

$$\varDelta^{(2)}u(k) + F(u)(k) = 0.$$

შესწავლილი იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები და დადგენილი იქნება მიღებული პირობების ოპტიმალურობა.

§5. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

უპირველეს ყოვლისა ჩამოვაყალიბებთ ზოგიერთ დამხმარე ლემას (აბელის გარდაქმნა), რომლებსაც გამოვიყენებთ ზოგიერთი უტოლობის დადგენისას.

ლემა 5.1. (აბელის გარდაქმნა) ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ ნამდვილი სასრული მიმდევრობები და $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$, მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

ლემა 5.2. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ უსასრულო მიმდევრობები, ვთქვათ მწკრივი $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ კრებადია, ხოლო $a_i B_{i+1} \to 0$, როცა $i \to +\infty$, სადაც $B_i = \sum_{j=i}^{+\infty} b_j$. მაშინ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i$ და $\sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i$ მწკრივების ერთ-ერთის კრებადობიდან გამომდინარეობს მეორეს კრებადობა და

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i = a_1 B_1 + \sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i.$$

ლემა 5.3. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობები, ვთქვათ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i$ კრებადია, $A_{k_0,n} b_n \to 0$, $b_n \to 0$, როცა $n \to +\infty$. მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$ სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a_i b_i = \sum_{i=k}^{+\infty} A_{k_0,i} (b_i - b_{i+1}) - b_k A_{k_0,k-1}, \qquad k \geq k_0 + 1,$$

სადაც $A_{k_0,i} = \sum_{j=k_0}^{i} a_j$.

ლემა 5.4. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, $u\colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0, +\infty)$, და

$$\varDelta^{(2)}u(i) \leq 0, \qquad i \in \mathbb{N}_{k_0},$$

$$\sup\{|\Delta^{(2)}u(i)|: i \geq k\} > 0, \text{ როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{5.1}$$

მაშინ

$$\Delta^{(1)}u(k) > 0, \; k \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{5.2}$$

დამტკიცება. რადგან $u: \mathbb{N}_{k_0} \to (0, +\infty)$, ამიტომ (5.1)-ის პირველი პირობის თანახმად

$$\Delta^{(1)}u(k) \geq 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{5.3}$$

მართლაც, ვთქვათ არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\Delta u(k_1) < 0$, მაშინ (5.1) -ის პირველი პირობის თანახმად $\Delta^{(1)}u(k)$ კლებადია, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$ და

$$\begin{gathered} \Delta^{(1)}u(k+1) \leq \Delta^{(1)}u(k) \\ \Delta^{(1)}u(k) \leq c < 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}, \end{gathered} \tag{5.4}$$

ამიტომ რეკურსიული გაშლით გვექნება

$$u(k) = u(k_1) + \sum_{i=k_1}^{k} \Delta^{(1)}u(i) \leq u(k_1) + c(k - k_1).$$

საკმარისად დიდი k-ს შემთხვევაში გვაქვს $u(k) < 0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $u(k) > 0, \; k \in \mathbb{N}_{k_0}$. მაშასადამე გვაქვს (5.2) უტოლობა. ამიტომ (5.1)-ის მეორე პირობით გვაქვს

$$\Delta^{(1)}u(k) \geq -\sum_{i=k}^{+\infty} \Delta^{(2)}u(i) = \sum_{i=k}^{+\infty} |\Delta^{(2)}u(i)| > 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{5.5}$$

მაშასადამე სრულდება პირობა (5.2).

ლემა 5.5. ვთქვათ შესრულებულია 5.4 ლემის პირობები და

$$\sum_{i=k_0}^{+\infty} i|\Delta^{(2)}u(i)| = +\infty, \tag{5.6}$$

მაშინ

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow \qquad \text{როცა } \; k \to +\infty. \tag{5.7}$$

დამტკიცება. 5.4 ლემის თანახმად $\Delta u(k) > 0$ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}$, სადაც k_0 საკმარისად დიდი რიცხვია. ამიტომ რადგან $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$ (5.5) უტოლობიდან მივიღებთ

$$u(k) \geq \sum_{l=k_0}^{k-1} \sum_{i=l}^{+\infty} |\Delta^{(2)}u(i)|, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}.$$

ამრიგად 5.1 ლემის თანახმად, თუ ავიღებთ $a_i \coloneqq 1,\, b_i \coloneqq \sum_{j=i}^{+\infty}\left|\Delta^{(2)}u(i)\right|$ გვექნება

$$u(k) \geq \sum_{j=k_0}^{k-1}\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left|\Delta^{(2)}u(i)\right| + \sum_{i=k_0}^{k-2}\sum_{j=k_0}^{i}\left|\Delta^{(2)}u(i)\right| =$$

$$= (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left|\Delta^{(2)}u(i)\right| + \sum_{i=k_0}^{k-2}(i-k_0+1)\left|\Delta^{(2)}u(i)\right|. \tag{5.8}$$

(5.6) პირობის ძალით

$$\sum_{i=k_0}^{k-2}(i-k_0+1)\left|\Delta^{(2)}u(i)\right| \to +\infty, \qquad k \to +\infty. \tag{5.9}$$

ამიტომ (5.8)-ის თანახმად გვაქვს $u(k) \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$. მეორე მხრივ, რადგან $\Delta u(k) > 0$ და $u(k)$ ზრდადია, ამიტომ სრულდება (5.7)-ის პირველი პირობა.

ტოლობის

$$\sum_{s=k_0}^{k} s\Delta^{(2)}u(s) = k_0\Delta^{(1)}u(k_0) + k\Delta^{(1)}u(k+1) - \sum_{i=k_0}^{k+1}\Delta^{(1)}u(i) -$$
$$-k_0\Delta^{(2)}u(k_0) + \Delta^{(1)}u(k+1) = k\Delta^{(1)}u(k+1) - u(k+1) -$$
$$-k_0\Delta^{(2)}u(k_0) - k_0\Delta^{(1)}u(k_0) + \Delta^{(1)}u(k+1) = k\Delta^{(1)}u(k+1) - u(k+1) + c$$

გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\sum_{s=k_0}^{k} s\Delta^{(2)}u(s) - k_0\Delta^{(2)}u(k_0) =$$
$$= k\Delta^{(1)}u(k+1) - u(k+1) + c$$

ამ უკანასკნელიდან (5.6)-ის თანახმად

$$u(k) - k\Delta u(k) \to +\infty, \qquad \text{როცა } k \to +\infty. \tag{5.10}$$

რადგან

$$\Delta^{(1)}\left(\frac{u(k)}{k}\right) = \frac{u(k+1)}{k+1} - \frac{u(k)}{k} = \frac{k\big(u(k+1)-u(k)\big) - u(k)}{k(k+1)}$$
$$= \frac{k\Delta u(k) - u(k)}{k(k+1)}.$$

(5.10)-ის თანახმად თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელ ტოლობას, მივიღებთ $\frac{u(k)}{k}\downarrow$. მაშასადამე სრულდება (5.7)-ის მეორე პირობა.

ლემა 5.6. ვთქვათ $\varphi,\psi\colon \mathbb{N}_{k_0}\to(0,+\infty)$, $k_0\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty} inf\varphi(k)=0,\qquad \psi(k)\uparrow+\infty, \text{როცა } k\uparrow+\infty, \tag{5.11}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\tilde{\varphi}(k)\psi(k)=+\infty, \tag{5.12}$$

სადაც

$$\tilde{\varphi}(k)=\min\{\varphi(s)\colon s\le k, s\in\mathbb{N}_{k_0}\}. \tag{5.13}$$

მაშინ არსებობს ზრდადი მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$, ისეთი, რომ

$$\lim_{i\to+\infty}k_i=+\infty,\qquad \tilde{\varphi}(k_i)=\varphi(k_i),\qquad \tilde{\varphi}(k_i)\psi(k_i)\le\tilde{\varphi}(s)\psi(s),\quad s\in\mathbb{N}_{k_i},\ \ i=1,2,\ldots.$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $E_i\subset\mathbb{N}_{k_0}$, $(i=1,2)$ სიმრავლეები შემდეგნაირად:

$$k\in E_1\Leftrightarrow\tilde{\varphi}(k)=\varphi(k),$$

$$k\in E_2\Leftrightarrow\tilde{\varphi}(s)\psi(s)\ge\tilde{\varphi}(k)\psi(k),\qquad s\in\mathbb{N}_k.$$

(5.11) და (5.12)-დან ცხადია $sup\,E_i=+\infty,(i=1,2)$. ვაჩვენოთ

$$\sup E_1\cap E_2=+\infty. \tag{5.14}$$

ვთქვათ $k_1\in E_2$ და $k_1\notin E_1$. (5.13)-დან გამომდინარე, არსებობს $k_2\in[k_0,k_1)$ ისეთი რომ $\tilde{\varphi}(k)=\tilde{\varphi}(k_2)$, $k=k_2,k_2+1,k_2+2,\ldots,k_1$ და $\tilde{\varphi}(k_2)=\varphi(k_2)$. შესაბამისად, რადგან ψ ზრდადია და $k_1\in E_2$, გვაქვს

$$\tilde{\varphi}(s)\psi(s)\ge\tilde{\varphi}(k_2)\psi(k_2),\qquad s\in\mathbb{N}_{k_2}$$

ამიტომ $k_2\in E_1\cap E_2$. თუ გავაგრძელებთ ზემოთ მოცემულ მსჯელობას $k_2<k_3\in E_2$, $k_3\notin E_1$ ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ არსებობს $k_4\in E_1\cap E_2$, იმის გათვალისწინებით, რომ $sup\,E_i=+\infty,(i=1,2)$, მივიღებთ რომ სამართლიანია (5.14). ლემა დამტკიცებულია.

§6. დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

განვიხილოთ განტოლება

$$\Delta^{(2)}u(k) + F(u)(k) = 0, \tag{6.1}$$

სადაც $F \in \boldsymbol{V}(\tau)$ და სრულდება (0.2) პირობა.

მეორე თავში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$ −თვის სრულდება უტოლობა

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{\tau_i(k)} |u(s)|^{\mu_i(s)} \Delta_s^{(1)} r_i(s,k)\right), \tag{6.2}$$

$$k \in \mathbb{N}_{k_0}, u \in \boldsymbol{H}_{k_0,\tau},$$

სადაც

$$\sigma_i;\tau_i:\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \mu_i:\mathbb{N} \to (0,+\infty), \sigma_i(k) \leq k, \sigma_i(k) \leq \tau_i(k), \lim_{k\to+\infty} \sigma_i(k) = +\infty,$$

$$r_i(\cdot\,,k) \text{ არაკლებადია}, r_i: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}\ (\mathrm{i} = 1,\dots,m), \limsup_{k\to+\infty}\big(\mu_i(k)\big) < +\infty. \tag{6.3}$$

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$. $\boldsymbol{U}_{k_0}$ − ით აღვნიშნოთ (6.1) განტოლების ყველა ამონახსნთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $u(k) > 0$ როცა $k \in \mathbb{N}_{\mathrm{k}_0}$.

ამ პარაგრაფში დადგენილია აუცილებელი პირობები (6.1) განტოლების დადებითი ამონახსნების არსებობის შესახებ.

თეორემა 6.1. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$ სრულდება (6.2), (6.3) პირობები,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} s^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,k)\right) = +\infty \tag{6.4}$$

და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{\tau_i(k)} \Delta_s^{(1)} r_i(s,k)\right) = +\infty. \tag{6.5}$$

გარდა ამისა, თუ $\boldsymbol{U}_{k_0} \neq \emptyset$, მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [0;1]$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \sup\left(\lim_{k\to+\infty} \inf k^{1-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{i(i+1)} \sum_{l=1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right)\right) \leq 1, \tag{6.6}$$

სადაც

$$h_{1\varepsilon}(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda=0,\\ \varepsilon, & \lambda\in(0,1],\end{cases}\qquad h_{2\varepsilon}=\begin{cases}0, & \lambda=1,\\ \varepsilon, & \lambda\in[0,1),\end{cases} \tag{6.7}$$

$$h_\varepsilon(\lambda)=h_{1\varepsilon}+h_{2\varepsilon}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ არსებობს $k_0\in\mathbb{N}$ ისეთი რომ $\boldsymbol{U}_{k_0}\neq\emptyset$. $\boldsymbol{U}_{k_0}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (6.1) განტოლებას გააჩნია $u\colon\mathbb{N}_{k_0}\to(0,+\infty)$ წესიერი ამონახსნი. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $k_1\in\mathbb{N}_{k_0}$, ისეთი, რომ

$$u(k)\geq(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i}l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right), \tag{6.8}$$

$$k\in\mathbb{N}_{k_1}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ

$$u\big(\sigma_i(k)\big)\geq C>0,\qquad (i=1,..,m),\qquad k\in\mathbb{N}_{k_1}. \tag{6.9}$$

თუ გავითვალისწინებთ (6.2), (6.1)-დან გვექნება

$$\Delta^{(1)}u(k)\geq\sum_{i=k}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right) \tag{6.10}$$

საიდანაც 5.1 ლემის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned}u(k)\geq&\sum_{l=k_0}^{k-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)=\\ =&(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)+\\ &+\sum_{i=k_0}^{k-2}(i-k_0+1)\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right),\qquad k\in\mathbb{N}_{k_0+2}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

მეორე მხრივ, თუ ვისარგებლებთ 5.3 ლემით, მივიღებთ

$$\sum_{i=k-1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)=$$

$$= \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{m} \left(i \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) =$$

$$= \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \sum_{l=k_0}^{i} \sum_{j=1}^{m} \left(l \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,\ell) \right) -$$

$$- \frac{1}{k-1} \sum_{i=k_0}^{k-2} \sum_{j=1}^{m} \left(i \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right),$$

$$k \in \mathbb{N}_{k_0+2}.$$

(6.11)-დან (6.10)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_0}^{i} \sum_{j=1}^{m} \left(l \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) -$$

$$- \sum_{i=k_0}^{k-2} \left(\frac{(k-k_0)i}{k-1} - (i-k_0+1) \right) \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) =$$

$$= (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_0}^{i} \sum_{j=1}^{m} \left(l \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) -$$

$$- \sum_{i=k_0}^{k-2} \frac{(k_0-1)(k-i-1)}{k-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) \geq$$

$$\geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_0}^{i} \sum_{j=1}^{m} \left(l \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) -$$

$$-(k_0-1) \sum_{i=k_0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) \geq$$

$$\geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_0}^{i} l \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) -$$

$$-(k_0-1)\Delta u(k_0), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0+2}. \tag{6.12}$$

რადგან $u(k) \uparrow +\infty$, როცა $k \to +\infty$, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $|u(s)|^{\mu_i(s)} \geq 1$, როცა $s \geq \sigma_j(i)$. (6.4)-ის თანახმად შევარჩიოთ $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}$ ისე, რომ

$$\sum_{l=k_0}^{k_1-1} l \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \geq 2(k_0-1)\Delta^{(1)} u(k_0). \qquad (6.13)$$

(6.12)-დან გვექნება

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_0}^{k_1-1} l \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) +$$

$$+(k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_1}^{i} l \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) -$$

$$-(k_0-1)\Delta^{(1)} u(k_0), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}$$

ამიტომ (6.13) -ის თანახმად გვაქვს

$$u(k) \geq 2(k-k_0)(k_0-1)\Delta^{(1)} u(k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} - (k_0-1)\Delta^{(1)} u(k_0) +$$

$$+(k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) \sum_{l=k_1}^{i} l \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right),$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

რადგან $\sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{k-1}$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (6.8) უტოლობა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $u(k) \uparrow +\infty$, როცა $k \to +\infty$, მაშინ (6.5)-ის თანახმად (6.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left| \Delta^{(2)} u(k) \right| = +\infty.$$

ამიტომ 6.5 ლემის თანახმად

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow .$$

ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია $\frac{u(k)}{k} \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოიძებნება $c > 0$ და $k_* \in \mathbb{N}_{k_1}$ ისეთი, რომ $u(k) \geq ck$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_*}$, ამიტომ (6.1)-დან (6.2)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$-\Delta^{(2)}u(k) \geq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} c^{\mu_j(s)} s^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,k)\right),$$

საიდანაც რეკურსიული გაშლით მივიღებთ

$$\Delta^{(1)}u(k) \geq \sum_{i=k_0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} c^{\mu_j(s)} s^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_i(s,i)\right).$$

ამ უტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$ მივიღებთ

$$\sum_{i=k_0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} s^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_i(s,i)\right) \leq \lim_{k\to+\infty} \Delta^{(1)}u(k) < +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (6.4) პირობას. მაშასადამე

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow 0, \qquad \text{როცა } k \uparrow +\infty. \tag{6.14}$$

აღვნიშნოთ Λ-ით იმ $\lambda \in [0,1]$ სიმრავლე, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u(k)}{k^{\lambda}} = 0.$$

(6.14)-ის თანახმად $1 \in \Lambda$ და $\lambda_0 = inf\Lambda \in [0,1]$. ამრიგად გვაქვს $\lambda_0 \in [0,1]$ და საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$-თვის

$$\lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0 \text{ და } \lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty, \tag{6.15}$$

სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}$ მოცემულია (6.7) ტოლობით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(k) = \left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(k)}, \quad \mu(k) = \min\{1, \mu_i(k): i = 1, \dots, m\} \tag{6.16}$$

და

$$\tilde{\varphi}(k) = \min\{\varphi(s): k_1 \leq s \leq k\}. \tag{6.17}$$

(6.14)-ის მეორე პირობის თანახმად

$$\lim_{k\to+\infty} \tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{6.18}$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k\to+\infty} k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) = +\infty. \tag{6.19}$$

მართლაც ნებისმიერი $k > k_1$, არსებობს $s_k \in [k_1, k]$ ისეთი, რომ $s_k \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$ და

$$\tilde{\varphi}(k) = \left(\frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s_k)}$$

ამ ტოლობიდან, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$, (6.14)-ის მეორე პირობის ძალით

$$k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) \geq {s_k}^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = \frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} \to +\infty, \qquad \text{□□□□}\ k \to +\infty.$$

რაც ამტკიცებს (6.19)-ის სამართლიანობას.

(6.8)-დან მივიღებთ

$$u(k) \geq$$

$$\geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_j(s)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right). \tag{6.20}$$

(6.15)-ის მეორე პირობის ძალით, ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} \geq 1$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$, ამიტომ (6.20)-დან გვექნება

$$u(k) \geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_j(s)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right)$$

$$= (k-k_0)\times$$

$$\times\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right). \tag{6.21}$$

(6.21)-დან თუ გავითვალისწინებთ (6.16) და (6.17), მივიღებთ

$$u(k) \geq$$

$$(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\tilde{\varphi}(s)^{\mu(s)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right), \tag{6.22}$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\tilde{\tau}_i(k) = \min\{k, \tau_i(k)\}$. მაშინ (6.22)-დან, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \uparrow +\infty$, გვაქვს

$$u(k) \geq$$

$$\geq (k - k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\varphi}\left(\tilde{\tau}_j(l)\right) \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right),$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

რადგან $\hat{\tau}_j(k) \leq k$ და $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$u(k) \geq$$

$$\geq (k - k_0) \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \tilde{\varphi}(i) \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \qquad (6.23)$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

(6.14) - (6.17), (6.19)-ის თანახმად სრულდება 5.6 ლემის ყველა პირობა, სადაც

$$\varphi(k) = \left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(k)}, \qquad \psi(k) = k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}. \qquad (6.24)$$

ამიტომ 5.6 ლემის ძალით არსებობს $\{k_i\}_{i=2}^{+\infty}$ წერტილთა ისეთი ზრდადი მიმდევრობა, რომ

$$\tilde{\varphi}(k_i) = \left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(k_i)}, \qquad \tilde{\varphi}(s) s^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \geq \tilde{\varphi}(k_i) k_i^{h_\varepsilon(\lambda_0)},$$

როცა $s \in \mathbb{N}_{k_i}$, $i = 2, 3, \ldots$.

(6.23)-დან (6.24)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$u(k_i) \geq (k_i - k_0) \left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(k_i)} k_i^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \times$$

$$\times \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right).$$

საიდანაც გამომდინარეობს,

$$\left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{1-\mu(k_i)} \geq \frac{(k_i - k_0) k_i^{h_\varepsilon(\lambda_0)}}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \times$$

$$\times \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right).$$

(6.24)-ის თანახმად, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \uparrow +\infty$ და $\mu(k_i) \leq 1$ მივიღებთ

$$\lim_{i\to+\infty} \sup \left((k_i - k_0) k_i^{-\lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \right) \leq 1.$$

მაშასადამე

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \left((k - k_0) k^{-\lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \right) \leq 1.$$

ვთქვათ $\delta \in (0,1)$. (6.5)-ის თანახმად შევარჩიოთ $k_* \in \mathbb{N}_{k_0}$ ისე, რომ

$$\left(1 - \frac{k_0}{k}\right) \left(1 - \frac{\sum_{l=1}^{k_0 - 1} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \cdot s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right)}{\sum_{l=1}^{k} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \cdot s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right)} \right) >$$

$$> 1 - \delta \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_*}.$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \left(k^{1-\lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{i(i+1)} \sum_{l=1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \right) \leq \frac{1}{1-\delta}$$

რადგან $\delta \in (0,1)$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია ცხადია, რომ სრულდება (6.6) პირობა. თეორემა დამტკიცებულია.

6.2 თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ზოგიერთი დამხმარე ლემის დამტკიცება.

ლემა 6.1. ვთქვათ $\tau_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty}\tau_i(k)=+\infty,\ \ (i=1,\dots,m),\tag{6.25}$$

მაშინ არსებობს არაკლებადი ფუნქცია $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to+\infty}\sigma(k)=+\infty,$$
$$\sigma(k)\le \min\{k,\tau_i(k): i=1,\dots,m\},\tag{6.26}$$
$$\sigma(\mathbb{N}_k)\supset \bigcup_{i=1}^{m}\tau_i(\mathbb{N}_k),\ \text{ნებისმიერი}\ k\in\mathbb{N}\text{-თვის}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_{2m+2},\dots\}=\{1,\tau_1(1),\tau_2(1),\dots,\tau_m(1),2,\tau_1(2),\dots,\tau_m(2),\dots\}$$

და შემოვიღოთ ფუნქცია $\tau: \mathbb{N}\to A$. (6.25)-ის თანახმად ცხადია

$$\lim_{k\to+\infty}\tau(k)=+\infty,\quad \tau(\mathbb{N}_k)\supset\tau_i(\mathbb{N}_k),\quad \forall k\in\mathbb{N}\tag{6.27}$$

შემოვიღოთ სიმრავლეთა ოჯახი A_i:

$$s\in A_1 \Leftrightarrow s\in\mathbb{N}, \tau(s)=inf\{\tau(k): k\in\mathbb{N}\},$$
$$s\in A_j \Leftrightarrow s\in\mathbb{N}, \tau(s)=inf\left\{\tau(k): k\in\mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}A_i\right\}, j=2,3\ \dots,$$

აღვნიშნოთ

$$\xi_j=\max A_j, j=1,2,\dots,\qquad \xi_1^0=\xi_1,\qquad \xi_i^0=\max\{\xi_j,\xi_{j-1}^0\}, j=2,3,\dots$$

ავაგოთ σ ფუნქცია შემდეგნაირად: $\sigma(k)=\tau(\xi_1)$, როცა $1\le k\le\xi_1^0$, $\sigma(k)=\tau(\xi_j)$, როცა $\xi_{j-1}^0\le k\le\xi_j^0$, $j=2,3,\dots$. σ ფუნქცია ცხადია არის არაკლებადი და აკმაყოფილებს (6.26)-ის პირველ და მეორე პირობებს. ჩვენ აგრეთვე გვაქვს $\sigma(\mathbb{N}_k)\supset\tau(\mathbb{N}_k)$ ნებისმიერი $k\in\mathbb{N}$-თვის. ამიტომ (6.27)-ის თანახმად $\sigma(\mathbb{N}_k)\supset\tau_i(\mathbb{N}_k)$, $(i=1,\dots,m)$. მაშასადამე სრულდება (6.26)-ის მესამე პირობა.

ლემა 6.2. ვთქვათ $\psi,\varphi: \mathbb{N}_{k_0}\to(0,+\infty)$, ψ არის არაზრდადი და

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(k)=+\infty,\tag{6.28}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\tilde{\varphi}(k)\psi(k)=0,\tag{6.29}$$

სადაც $\tilde{\varphi}(k)=\inf\{\varphi(s): s\ge k; s\in\mathbb{N}\}$. მაშინ არსებობს ზრდადი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ისეთი, რომ $k_i\uparrow+\infty$ როცა $i\uparrow+\infty$ და

$$\tilde{\varphi}(k_i)=\varphi(k_i),\ \tilde{\varphi}(k)\psi(k)\ge\tilde{\varphi}(k_i)\psi(k_i),\ k\le \mathrm{k_i},\tag{6.30}$$
$$i=1,2,\dots\ .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $k\in\mathbb{N}$. E_i-ით $(i=1,2)$ აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$k\in E_1\Leftrightarrow\tilde{\varphi}(k)=\varphi(k),\tag{6.31}$$

$$k \in E_2 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k)\psi(k) \geq \tilde{\varphi}(s)\psi(s), \ s = 1,2, \dots, k \qquad (6.32)$$

ცხადია, რომ $sup\, E_i = +\infty$, $(i = 1,2)$. მართლაც, ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, აღვნიშნოთ $k_1 = inf\{\varphi(s); s \in \mathbb{N}_k\}$. მაშინ (6.26)-ის თანახმად ცხადია, $k_1 \in [k, +\infty)$ და $\tilde{\varphi}(k_1) = \varphi(k_1)$. მაშასადამე, $k_1 \in E_1$. თუ გავაგრძელებთ და ავიღებთ $k \geq k_1$, მარტივად დავრწმუნდებით, რომ $sup\, E_1 = +\infty$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $sup\, E_2 = +\infty$.

ვაჩვენოთ, რომ $sup\, E_1 \cap E_2 = +\infty$. ვიგულისხმოთ, რომ $k_* \in E_2$ და $k_* \notin E_1$. ამიტომ არსებობს $k^* > k_*, k^* \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\tilde{\varphi}(k^*) = \tilde{\varphi}(k)$ როცა $k \in [k_*, k^*]$ და $\tilde{\varphi}(k^*) = \varphi(k^*)$. მაშასადამე $k^* \in E_1$. მეორე მხრივ, რადგან ψ არაზრდადია, ამიტომ ცხადია, რომ $k^* \in E_2$. ე.ი. $k^* \in E_1 \cap E_2$. თუ გავაგრძელებთ მსგავს მსჯელობას მივიღებთ $sup E_1 \cap E_2 = +\infty$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.2. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U}_{k_0} \neq \emptyset$ და სრულდება (6.2) -(6.5) პირობები, მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [0,1]$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left(\lim_{k \to +\infty} \inf k^{-\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{l=1}^{k-1} \sigma(l)^{\,h_\varepsilon(\lambda_0)} \sum_{i=l}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} s^{(\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) \right) \leq 1, \qquad (6.33)$$

სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (6.7) და σ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს.

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ 6.1 ლემის თანახმად, არსებობს ფუნქცია σ, რომელიც აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\lambda_0 \in [0,1]$ ისეთი, რომ სრულდება (6.33) პირობა. $\boldsymbol{U}_{k_0}$-ის განმარტებით (6.1) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $u(k) > 0$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}$. მაშინ 5.5 ლემის ძალით გვაქვს

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow 0, \qquad \text{როცა } k \to +\infty \qquad (6.34)$$

და

$$u(k) \geq \sum_{l=k_1}^{k-1} \sum_{i=l}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right), k \in \mathbb{N}_{k_0}. \qquad (6.35)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Lambda_u = \left\{\lambda \in [0,1): \lim_{k\to+\infty} \frac{u(k)}{k^\lambda} = +\infty\right\}, \qquad u \in \boldsymbol{H}_{k_0,\tau}.$$

(6.34)-დან ცხადია $0 \in \Lambda_u$ და $1 \notin \Lambda_u$. მაშასადამე $\Lambda_u \subset [0,1)$ და $\lambda_0 = sup\,\Lambda_u \in [0,1]$. ვაჩვენოთ, რომ ასე შერჩეული λ_0-თვის სამართლიანია (6.33) უტოლობა. (6.34)-ის და λ_0-ის შერჩევის გამო მივიღებთ

$$\lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0 \text{ და } \lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty, \tag{6.36}$$

$$0 < \lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0) < \lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0) \le 1. \tag{6.37}$$

აღვნიშნოთ

$$\tilde{\varphi}(k) = \min\left\{\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s)} : s \ge k \ge k_0, \qquad s \in \mathbb{N}\right\}, \tag{6.38}$$

სადაც

$$\mu(s) = \min\{1, \mu_i(s): i = 1,2,\dots,m\}. \tag{6.39}$$

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ε-თვის სრულდება პირობა

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{6.40}$$

მართლაც საკმარისად მცირე დადებითი ε-თვის (6.37) და (6.38)-ის თანახმად გვექნება

$$s^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) \le s^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = \frac{u(s)}{s^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}.$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (6.36)-ის პირველი პირობას, სამართლიანია (6.40).

რადგან $\sigma(k) \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$, (6.35)-დან მივიღებთ

$$u\big(\sigma(k)\big) \ge \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1} \sum_{i=l}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i)\right), k \in N_{k_2} \tag{6.41}$$

სადაც $k_2 \in \mathbb{N}_{k_1}$ საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია.

(6.36) და (6.37)-ის თანახმად ფუნქციები

$$\varphi(k) = \left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(k)}, \qquad \psi(k) = k^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}$$

აკმაყოფილებენ 6.2 ლემის პირობებს, ამიტომ σ ფუნქციის განმარტების თანახმად მოიძებნება ისეთი $\{k_i\}_{i=3}^{+\infty}$, $k_i \in \mathbb{N}_{k_2}$ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომ

$$\tilde{\varphi}\big(\sigma(k_i)\big) = \varphi\big(\sigma(k_i)\big),\ \tilde{\varphi}\big(\sigma(k)\big)\psi\big(\sigma(k)\big) \ge \tilde{\varphi}\big(\sigma(k_i)\big)\psi\big(\sigma(k_i)\big), \tag{6.42}$$

$$k_2 \le k \le k_i, \quad i = 3,4,\dots$$

რადგან σ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს, ამიტომ ცხადია

$$\tilde{\varphi}\left(\tau_j(k)\right) \geq \tilde{\varphi}\big(\sigma(k)\big),\ j = 1,2,\dots,m,. \tag{6.43}$$

(6.36)-ის მეორე პირობის გათვალისწინებით, (6.41)-დან საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$u\big(\sigma(k)\big) \geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_j(s)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right) \geq$$

$$\geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\tilde{\varphi}(s)\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right).$$

რადგან $\tilde{\varphi}$ არაკლებადია (6.43)-ით გვექნება

$$u\big(\sigma(k)\big) \geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\tilde{\varphi}\left(\sigma_j(i)\right)\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right) \geq$$

$$\geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\tilde{\varphi}\big(\sigma(l)\big)\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)$$

აქედან თუ გავითვალისწინებთ (6.42)-ის მეორე უტოლობას

$$\big(\sigma(k_i)\big) \geq \left(\frac{u(\sigma(k_i))}{(\sigma(k_i))^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}(\sigma(k_i))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \times$$

$$\times \sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1}(\sigma(n))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{l=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)$$

მაშასადამე

$$\left(\left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}\big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\right)^{\frac{1-\mu(\sigma(k_i))}{\mu(\sigma(k_i))}} \geq$$

$$\geq (\sigma(k_i))^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{\mu(\sigma(k_i))}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)} \times$$

$$\times \sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1}(\sigma(n))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{l=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right). \tag{6.44}$$

მეორე მხრივ, რადგან $\mu(\sigma(k_i)) \leq 1$, ამიტომ $(\sigma(k_i))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \leq \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(\sigma(k_i))}$.

ე.ი.

$$\left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}(\sigma(k_i))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \le \left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}$$

თუ გავითვალისწინებთ (6.29) და იმ ფაქტს, რომ $\lim_{i\to+\infty}\inf\mu(\sigma(k_i)) > 0$, გვექნება

$$\lim_{i\to+\infty}\left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}(\sigma(k_i))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} = 0.$$

მაშასადამე საკმარისად დიდი i-თვის (6.44)-ის მარცხენა მხარე ნაკლებია ან ტოლი 1-ის. მაშასადამე

$$\lim_{i\to+\infty}\sup(\sigma(k_i))^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\left(1-\frac{1}{\mu(\sigma(k_i))}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)} \times$$
$$\times\sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1}(\sigma(n))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{l=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right) \le 1,$$

ამიტომ

$$\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{\mu(k)}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\big(\sigma(l)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)$$
$$\le 1$$

ამ უტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ (6.33)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

§7. ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები

ამ პარაგრაფში დამტკიცებულია (6.1) განტოლების რხევადობისთვის საკმარისი პირობები, სადაც არსებითი გამოყენება აქვს მეექვსე პარაგრაფში მიღებულ შედეგებს.

თეორემა 7.1 ვთქვათ სრულდება (6.2)- (6.5) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda)}}{i(i+1)}\sum_{l=1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right) > 1, \tag{7.1}$$

სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (6.7), მაშინ (6.1) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $u: \mathbb{N}_{k_0} \to (0,+\infty)$ არის (6.1) განტოლების წესიერი არარხევადი ამონახსნი, მაშასადამე $\boldsymbol{U}_{k_0} \neq \emptyset, k_0 \in \mathbb{N}$. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 6.1-ს, ადვილი მისახვედრია, რომ სრულდება (6.6) უტოლობა. რაც ეწინააღმდეგება (7.1). თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.2-ის ანალოგიურად ადვილი მისაღებია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.2. ვთქვათ სრულდება (6.2)- (6.5) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right) > \\ > 1, \tag{7.2}$$

სადაც და σ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს, მაშინ (6.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია, სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (6.7).

შედეგი 7.1. ვთქვათ სრულდება (6.2)- (6.5) პირობებიდანებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის არსებობს $\delta > 1$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,i)\right)\right) > \\ > (1-\lambda)\delta, \tag{7.3}$$

მაშინ (6.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია, სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (6.7).

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ სრულდება თეორემა 7.1-ის პირობები. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (7.3) პირობიდან გამომდინარეობს (7.1) უტოლობა. (7.3)-ის თანახმად არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0 > 0$ და $\delta_1 \in (0, \delta]$ ისეთი, რომ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}, \varepsilon \in (0; \varepsilon]$

$$k^{-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \sum_{l=1}^{k} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) > (1-\lambda)\delta_1. \tag{7.4}$$

(7.4)-დან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) := k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda)}}{i(i+1)} \sum_{l=1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) \geq$$

$$\geq k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(1-\lambda)\delta_1 i^{\lambda-h_\varepsilon(\lambda)+h_{1\varepsilon}(\lambda)}}{i(i+1)} = \delta_1(1-\lambda)k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_i^{i+1} \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

შევარჩიოთ $\varepsilon_0 \in (0;1)$ ისე, რომ $\delta_1(1-\varepsilon_0) > 1$. მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან საკმარისად დიდი k-თვის

$$I(k,\varepsilon) \geq \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} (i+1)^{\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_i^{i+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \geq$$

$$\geq \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \int_i^{i+1} \xi^{\lambda-2-h_{2\varepsilon}(\lambda)} d\xi =$$

$$= \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_k^{+\infty} \xi^{\lambda-2-h_{2\varepsilon}(\lambda)} d\xi = \frac{\delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)}{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)},$$

მაშასადამე

$$\lim_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon) > \frac{\delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)}{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}.$$

ე.ი. $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0_+} \left(\lim\limits_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon) \right) > \delta_1(1-\varepsilon_0) > 1$. მაშასადამე სრულდება (7.1) პირობა.

შედეგი 7.2. ვთქვათ (6.2)-(6.5) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის არსებობს $\delta > 1$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf \left(\lim_{k\to+\infty} \inf k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,i) \right) \right) >$$

$$> \lambda(1-\lambda)\delta, \tag{7.5}$$

მაშინ (6.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება. თუ ვისარგებლებთ (5.1) ლემით, გვექნება

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,i)\right)=$$

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,i)\right)\right)=$$

$$k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,i)\right)+$$

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)A_i,$$

სადაც

$$A_i := \sum_{l=1}^{i} l^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,l)\right).$$

მაშასადამე (7.5)-ის თანახმად, საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s^{(1)} r_j(s,i)\right)\geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta + k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1} i\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)i^{-1}A_i \geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1} i\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)\right)=$$

$$=\lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i+1}(i+1)\left(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\right)\int_i^{i+1}\xi^{\lambda-2+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\right)\geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{k-1}\int_i^{i+1}\xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\left(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\right)\right)=$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}(1-\varepsilon)\int_1^{k}\xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\left(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\right)\right)=$$

$$= \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+\frac{(1-\varepsilon)\big(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\big)}{\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\big(k^{\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-1\big)k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)=$$

$$= \lambda(1-\lambda)\delta\frac{1+o(1)}{\lambda} \geq \lambda(1-\lambda)\delta_1. \quad \text{სადაც } 0<\delta_1>\delta.$$

მაშასადამე სრულდება შედეგი (7.1)-ის პირობები, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.3 ვთქვათ $\alpha_i \in (0,+\infty)$, $(i = 1,\dots,m)$ და

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf\frac{\sigma_i(k)}{k^{\alpha_i}}>0, \qquad (i = 1,\dots,m), \tag{7.6}$$

მაშინ, იმისათვის, რომ (6.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი საკმარისია, რომ ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის სრულდებოდეს

$$\underset{\varepsilon\to0}{lim}\sup\left(\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}i^{\alpha h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right) > 1, \qquad (7.7)$$

$$\alpha = min\{1,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \tag{7.8}$$

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს და სრულდება (7.2) პირობა. (7.6)-თანახმად არსებობს ისეთი $c \in (0,1)$, რომ სრულდება $\sigma_i(k) \geq ck^{\alpha}$, $(i = 1,\dots,m)$, $k \in \mathbb{N}$, სადაც α მოცემული (7.8) ტოლობით და ფუნქცია $\sigma(k) = [ck^{\alpha}]$ აკმაყოფილებს (6.26) პირობებს.

მეორე მხრივ (7.2)-დან გვაქვს

$$\underset{\varepsilon\to0}{lim}\sup\left(\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{\,h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right)\geq$$

$$\geq \underset{\varepsilon\to0}{lim}\sup\left(\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}i^{\alpha h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right)\underset{\varepsilon\to0}{lim}\inf c^{h_\varepsilon(\lambda)}.$$

რადგან $h_\varepsilon(\lambda)\to 0$, როცა $\varepsilon\to0$, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (7.7)-ს მივიღებთ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right)>1.$$

მაშასადამე სრულდება 7.2 თეორემის პირობები, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.4. ვთქვათ სრულდება (7.6) პირობები და ნებისმიერი $\lambda\in[0,1]$-თვის გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1-\lambda+\alpha h_\varepsilon(\lambda)-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right)>$$
$$>\lambda, \tag{7.9}$$

მაშინ (6.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (7.9)-დან გამომდინარეობს (7.7). (7.9)-ის თანახმად არსებობს $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ დადებით ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა, $\varepsilon_i\to 0$, როცა $i\to+\infty$, $\delta>0$ და $k_i\in\mathbb{N}$, $(i=1,2,\dots)$, ისეთი, რომ

$$k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)>\lambda+\delta,\qquad k\in\mathbb{N}_{k_i}.$$

ამიტომ

$$I(k,\varepsilon_i):=k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{n=1}^{k-1}n^{\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=n}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\geq$$

$$\geq k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{n=k_i}^{k-1}n^{\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=n}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\geq$$

$$\geq k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}(\lambda+\delta)\sum_{n=k_i}^{k-1}n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)},\qquad i=1,2,\dots,\qquad k\in\mathbb{N}_{k_i},$$

ამრიგად

$$\lim_{k\to+\infty}\inf I(k,\varepsilon_i) \geq \lim_{k\to+\infty}\inf\left(k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}(\lambda+\delta)\sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\right), \qquad i=1,2,\dots \qquad (7.10)$$

მეორე მხრივ, რადგან $1-\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda) \geq 0$, ამიტომ საკმარისად დიდი k_i-თვის გვექნება

$$\sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \geq \sum_{n=k_i}^{k-1}\int_n^{n+1} \xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}d\xi = \int_{k_i}^{k} \xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\left(k^{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} - k_i^{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\right), \qquad k\in\mathbb{N}_{k_i}.$$

ამიტომ (7.10)-ის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{k\to+\infty}\inf I(k,\varepsilon_i) \geq \frac{\lambda+\delta}{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)},$$

ე.ი

$$\lim_{i\to+\infty}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf I(k,\varepsilon_i)\right) \geq \frac{\lambda+\delta}{\lambda} > 1.$$

რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.5. ვთქვათ სრულდება (7.6) პირობები და ნებისმიერი $\lambda\in[0,1]$-თვის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1+(\alpha-1)h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right)\right) >$$

$$> \lambda(1-\lambda), \qquad (7.11)$$

სადაც α მოცემულია (7.8) ტოლობით. მაშინ (6.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $h_{1\varepsilon}(0)=0$, მაშინ ცხადია, რომ (7.11)-დან გამომდინარეობს (7.9). ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $\lambda\in(0,1]$. (7.11)-ის თანახმად არსებობს $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, $\varepsilon_i\to 0$, როცა $i\to+\infty$, $\delta>0$ და $k_i\in\mathbb{N}$, $(i=1,2,\dots)$, ისეთი, რომ

$$k^{1+(\alpha-1)h_{\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(s^{\mu_j(s)}/l\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\Delta_s^{(1)}r_j(s,l)\right) > \lambda(1-\lambda)(1+\delta),$$

$$k\in\mathbb{N}_{k_i}. \qquad (7.12)$$

მეორე მხრივ, ლემა 5.2-ის თანახმად

$$I(k,\varepsilon_i) \coloneqq k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k}^{+\infty} l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(s^{\mu_j(s)}/l\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) =$$

$$= k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} k^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(s^{\mu_j(s)}/l\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,l) \right) +$$

$$+ k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} \left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} - (l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \right) A_l.$$

სადაც

$$A_l \coloneqq \sum_{n=l}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(n)}^{\tau_j(n)} \left(s^{\mu_j(s)}/n\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \Delta_s^{(1)} r_j(s,n) \right).$$

(7.12)-ის თანახმად, საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta) \times$$

$$\times \left(1 + k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1-(\alpha-1)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} - (l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \right) \right).$$

რადგან $\alpha \leq 1$, უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta) \times$$

$$\times \left(1 + k^{1-\lambda+h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{(1-\alpha)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1} \left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} - (l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \right) \right).$$

მეორე მხრივ

$$\sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1} \left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} - (l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \right) = \left(\lambda - h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right) \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1} \int_{l-1}^{l} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-1} d\xi \geq$$

$$\geq \left(\lambda - h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right) \sum_{l=k+1}^{+\infty} \int_{l-1}^{l} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-2} d\xi = \left(\lambda - h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right) \int_{k+1}^{+\infty} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-2} d\xi$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta) \left(1 + \left(\frac{k+1}{k}\right)^{(1-\alpha)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \frac{\lambda - h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}{1-\lambda+h_{1\varepsilon_i}(\lambda)} \right).$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (7.9), რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 7.6. ვთქვათ $\alpha_i,\beta_i \in (0,+\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i < \beta_i \le 1$, $P_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(i = 1,\dots,m)$, სრულდება უტოლობა

$$F(u)(k)u(k) \ge 0, \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}, u \in \boldsymbol{H}_{k_0,\tau},$$

და

$$|F(u)(k)| \ge \sum_{l=1}^{m} P_l(k) \sum_{s=[\alpha_l k]}^{[\beta_l k]} |u(s)|^{1+\frac{d_l}{\log_2 s}} \tag{7.13}$$

მაშინ იმისთვის, რომ (6.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^3 \left(\prod_{l=1}^{m} P_l(i)\right)^{\frac{1}{m}} > \max_{\lambda\in[0,1]} \left\{ \frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m} d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda} - \alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}} \right\}. \tag{7.14}$$

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ, როდესაც $\sigma_l(k) = [\alpha_l k]$, $\tau_l(k) = [\beta_l k]$, $r_l(s,i) = P_l(i)s$, $\mu_l(s) = 1 + \frac{d_l}{\log_2 s}$, $(l = 1,\dots,m)$, (7.14)-დან გამომდინარეობს (7.5) უტოლობა. მართლაც

$$I(k,\varepsilon) \coloneqq k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i) \sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\left(1+\frac{d_l}{\log_2 s}\right)+h_\varepsilon(\lambda)\left(1+\frac{d}{\log_2 s}\right)} \right) =$$

$$= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i) \sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))} 2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))} s^{h_\varepsilon(\lambda)}\, 2^{d h_\varepsilon(\lambda)} \right),$$

სადაც $d = \min\{d_1,\dots,d_m\}$.

აქედან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) = k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i) 2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+d h_\varepsilon(\lambda)} \sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))} \int_{s-1}^{s} d\xi \right).$$

რადგან $\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda) \ge 0$ გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) \ge k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i) 2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+d h_\varepsilon(\lambda)} \sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} \int_{s-1}^{s} \xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))} \right) =$$

$$k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i) 2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+d h_\varepsilon(\lambda)} \int_{[\alpha_l i]-1}^{[\beta_l i]} \xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))}\, d\xi \right).$$

მაშასადამე

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{k^{-1}}{\lambda + h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+dh_\varepsilon(\lambda)}\big([\beta_l i]^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}$$
$$-\left([\alpha_l i]-1\right)^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\big).$$

რადგან $\frac{[\alpha i]}{i} \to \alpha$ როცა $i \to +\infty$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{2^{dh_\varepsilon(\lambda)}k^{-1}}{\lambda + h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} i^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))} \times$$
$$\times\left({\beta_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1} - {\alpha_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\right)\left(1+o(1)\right).$$

თუ ვისარგებლებთ საშუალო არითმეტიკულ-საშუალო გეომეტრიული უტოლობით მივიღებთ

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{2^{dh_\varepsilon(\lambda)}k^{-1}}{\lambda + h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\left(1+o(1)\right)\sum_{i=1}^{k} i^3\left(\prod_{l=1}^{m} p_l(i)\right)^{\frac{1}{m}} \times$$
$$\times\left(\prod_{l=1}^{m}\left({\beta_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1} - {\alpha_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\right)\right)^{\frac{1}{m}} 2^{\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))}.$$

ამ უკანასკნელიდან თუ გავითვალისწინებთ (7.14) პირობას, არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ სრულდება (7.5) უტოლობა. რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შენიშვნა 7.1. თუ $\alpha \in \mathbb{R}$, 7.5 შედეგში სიმბოლოში $[\alpha]$ იგულისხმება α რიცხვის მთელი ნაწილი.

შედეგი 7.7. ვთქვათ $\alpha_i, \beta_i \in (0,+\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \leq \beta_i \leq 1$, $(i = 1,\dots,m)$, $P_i{:}\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(i = 1,\dots,m)$, სრულდება (0.2) და (7.13) პირობები, მაშინ იმისთვის, რომ (6.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\lim_{k\to+\infty}\inf k\sum_{i=k}^{+\infty} i\left(\prod_{l=1}^{m} P_l(k)\right)^{\frac{1}{m}} > \max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m} d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda}-\alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}}\right\}. \qquad (7.15)$$

დამტკიცება. შედეგი 7.7 მტკიცდება შედეგი 7.6-ის ანალოგიურად, (7.15)-ის თანახმად ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (7.11) უტოლობა, როდესაც $\sigma_l(k) = [\alpha_l k]$,$\tau_l(k) = [\beta_l k]$, $r_l(s,i) = P_l(i)s$, $\mu_l(s) = 1 + \frac{d_l}{log_2 s}$,$(l = 1,\dots,m)$.

შენიშვნა 7.2. ვაჩვენოთ, რომ 7.6 შედეგში პირობა (7.14) არ შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი პირობით

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^3\left(\prod_{l=1}^{m} P_l(k)\right)^{\frac{1}{m}} \geq \max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m} d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda}-\alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}}\right\}. \tag{7.16}$$

მოვიყვანოთ მაგალითი იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $m = 1$. $d \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta \leq 1$. აღვნიშნოთ

$$C_0 \coloneqq \max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\lambda d}}{\beta^{1+\lambda}-\alpha^{1+\lambda}}\right\}, \tag{7.17}$$

$\lambda_0 \in [0,1]$ სადაც მიიღწევა ეს მაქსიმუმი.

განვიხილოთ განტოლება.

$$\Delta^2 u(k) + P(k)\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\left(u(s)\right)^{1+\frac{d}{log_2 s}}\operatorname{sign}\left(u(s)\right) = 0 \tag{7.18}$$

სადაც

$$P(k) = \frac{-\Delta^2 k^{\lambda_0}}{\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0\left(1+\frac{d}{log_2 s}\right)}} = \frac{-\Delta^2 k^{\lambda_0}}{2^{d\lambda_0}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}}. \tag{7.19}$$

ცხადია, რომ

$$\Delta^2 k^{\lambda_0} = \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{k^{2-\lambda_0}} + \frac{o(1)}{k^{2-\lambda_0}}. \tag{7.20}$$

მეორე მხრივ გვაქვს

$$\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}\int_{s+1}^{s} d\xi \leq \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\int_{s}^{s+1}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \int_{[\alpha k]}^{[\beta k]+1}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \tag{7.21}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0+1}\left(([\beta k]+1)^{\lambda_0+1} - [\alpha k]^{\lambda_0+1}\right) = \frac{k^{\lambda_0+1}}{\lambda_0+1}\left(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\right)\left(1+o(1)\right),$$

აგრეთვე

$$\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}\int_{s+1}^{s} d\xi \geq \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\int_{s-1}^{s}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \int_{[\alpha k]-1}^{[\beta k]}\xi^{\lambda_0}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0+1}\left([\beta k]^{\lambda_0+1} - ([\alpha k]-1)^{\lambda_0+1}\right) = \frac{k^{\lambda_0+1}}{\lambda_0+1}\left(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\right)\left(1+o(1)\right) \tag{7.22}$$

(7.21) და (7.22)-ის თანახმად გვექნება

$$k^{-\lambda_0-1}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0+1}\left(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\right)\left(1+o(1)\right). \tag{7.23}$$

მაშასადამე (7.17), (7.19), (7.20) და (7.23)-ის თანახმად გვაქვს

$$P(k) = \frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\lambda_0 d}+o(1)}{k^{2-\lambda_0}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}} = \frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\lambda_0 d}}{k^3\dfrac{1}{\lambda_0+1}(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1})} + \frac{o(1)}{k^3} = \frac{C_0}{k^3} + \frac{o(1)}{k^3},$$

ამიტომ გვაქვს

$$\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^3 P(i) = C_0.$$

მაშასადამე სრულდება (7.16) პირობა, ამასთან (7.18) განტოლებას გააჩნია დადებითი ამონახსნი $u(k) = k^{\lambda_0}$.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (7.15) ასევე ოპტიალური პირობაა.

თავი 3

პირველი რიგის დაგვიანებულ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლების ამონახსნების სპეციფიური თვისებები

მოცემულ თავში დამტკიცებული იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ პირველი რიგის დაგვიანებულ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლების ამონახსნები იყოს რხევადი. ეს თეორემები დამახასიათებელია დაგვიანებული არგუმენტიანი განტოლებებისათვის და არ გააჩნია ანალოგი ჩვეულებრივი განტოლების შემხვევაში.

§8. ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები

ამ პარაგრაფში შესწავლილი იქნება პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta^{(1)} u(k) + F(u)(k) = 0, \tag{8.1}$$

სადაც $F\colon \mathbf{S}(\mathbb{N};\mathbb{R}) \to \mathbf{S}(\mathbb{N};\mathbb{R}), F \in \boldsymbol{V}(\tau)$. ქვემოთ ყველგან იგულისხმება რომ F ოპერატორი აკმაყოფილებს (0.2) პირობას და რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$ −თვის სრულდება უტოლობა

$$F(u)(k) \geq \sum_{i=1}^{m} p_i(k)\left|u\big(\tau_i(k)\big)\right|, \tag{8.2}$$

სადაც $m \in \mathbb{N}$, $p_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\tau_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_i(k) = +\infty$, $\tau_i(k) \leq k+1, i = 1, \dots, m$.

განმარტება. ვიტყვით, რომ (8.1) განტოლება რხევადია. თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

ანალოგიური ამოცანა პირველი რიგის დაგვიანებული არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის კარგადაა შესწავლილი [31-33], [8] შრომაში. ანალოგიური ამოცანა სხვაობიანი განტოლებებისთვის შესწავლილია შრომებში [24-30], [3-4]. უნდა აღინიშნოს [8] შრომა, სადაც ლადასის, სპიკასის და ფილოსის მიერ 1985 წელს მიღებული იყო ორტიმალური შედეგი. ამ შედეგების დაზუსტება მოხდა შრომაში [10].

ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები ეხება სხვაობიან განტოლებას მრავალი დაგვიანებით, სადაც მიღებული შედეგები ერთი დაგვანების შემთხვევაში წარმოადგენენ [8] შრომაში მიღებული შედეგის გარკვეულ დაზუსტებას.

ქვემოთ ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:

$$\tau_*(k) = \min\{\tau_i(k)\colon i = 1, \dots, m\},$$

$$\eta^{\tau_*}(k) = \max\{s\colon s \in \mathbb{N}, \tau_*(s) \le k,$$
$$\eta_1^{\tau_*}(k) = \eta^{\tau_*}(k), \qquad \text{როცა}\, k \in \mathbb{N} \ \ (i = 2,3,\dots), \tag{8.3}$$
$$\eta_i^{\tau_*}(k) = \eta_1^{\tau_*}(k) \circ \eta_{i-1}^{\tau_*}(k)$$

სადაც $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_*(k) = +\infty$, ცხადია რომ $\eta_i^{\tau_*}(k) < +\infty$ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N} -$ თვის და $\eta_i^{\tau_*}(k) \uparrow +\infty$ როცა $k \uparrow +\infty$.

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$. აღვნიშნოთ

$$\psi_1(k) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + mp^{\frac{1}{m}}(j)\right) \qquad \text{როცა} \quad k \ge k_0 \tag{8.4}$$

$$\psi_s(k) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + mp^{\frac{1}{m}}(j)\psi_{s-1}(j)\right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{როცა}\ k \ge \eta_s^{\tau_*}(k_0) \ \ (s = 2,3,\dots) \tag{8.5}$$

$$p(j) = \prod_{i=1}^{m} p_i(j). \tag{8.6}$$

თეორემა 8.1. ვთქვათ არსებობს $s_0 \in \mathbb{N}$ და არაკლებადი ფუნქციები$\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i = 1,\dots m$ ისეთი, რომ

$$\tau_i(k) + 1 \le \sigma_i(k) \le k \qquad \text{როცა}\ \ k \in \mathbb{N} \quad i = 1,\dots m. \tag{8.7}$$

და

$$\limsup_{k\to+\infty} \prod_{\ell=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{s=\sigma_\ell(k)}^{k} p_i(s) \prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1} \left(1 + mp^{\frac{1}{m}}(j)\psi_{s_0}^{\frac{1}{m}}(j)\right)\right)^{\frac{1}{m}} > \frac{1}{m^m} \tag{8.8}$$

მაშინ (8.1) განტოლება რხევადია, სადაც ψ_{s_0} და p ფუნქციები მოცემულია (8.4), (8.5) და (8.6) ტოლობებით, როცა $s = s_0$.

თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ზოგიერთი დამხმარე ლემა. ქვემოთ მოვიყვანთ შემდეგი შეფარდებების შეფასებებს

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \qquad \text{და} \quad \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)}\right)^{\frac{1}{m}},$$

სადაც $u\colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0;+\infty)$ არის (8.1) განტოლების დადებითი ამონახსნი, $i = 1,\dots m$.

ლემა 8.1. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, სრულდება (0.2) და (8.2)პირობები, $u\colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0;+\infty)$ არის (8.1) განტოლების დადებითი ამონახსნი. მაშინ ნებისმიერი $s \in \mathbb{N}$ −თვის გვაქვს

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{m} u(\tau_i(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left[\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(j)\right)^{1/m} \psi_s(j)\right)\right]^{1/m} \tag{8.9}$$

როცა $k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_0)$ $(s = 1,2,\dots)$, სადაც ψ_s და $\eta_s^{\tau_*}$ ფუნქციები განსაზღვრულია (8.3)-(8.6) ტოლობებით.

დამტკიცება. (0.2) და (8.2)-ის თანახმად (8.1)-დან გვაქვს

$$\frac{u(k)}{u(k+1)} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i(k) \frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \quad \text{როცა} \quad k \geq \eta_1(k_0). \tag{8.10}$$

რადგან $\tau_i(k) \geq \eta_1(k_0)$ როცა $k \geq \eta_2(k_0)$ ამიტომ (8.10)-დან გვექნება

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \geq \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + \sum_{l=1}^{n} p_l(j) \frac{u(\tau_l(j))}{u(j+1)}\right) \quad \text{როცა} \;\; k \geq \eta_2(k_0).$$

თუ ვისარგებლებთ საშუალო არითმეტიკულის და საშუალო გეომეტრიულის უტოლობით, უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \geq \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + m \left(\prod_{l=1}^{m} p_l(j)\right)^{\frac{1}{m}} \frac{\left(\prod_{l=1}^{m} u(\tau_l(j))\right)^{\frac{1}{m}}}{u(j+1)}\right)$$

$$\text{როცა } k \geq \eta_2(k_0) \; (i = 1, \dots, m).$$

მაშასადამე

$$\frac{\left(\prod_{l=1}^{m} u(\tau_l(k))\right)^{\frac{1}{m}}}{u(k+1)} \geq$$

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + m \left(\prod_{l=1}^{m} p_l(j)\right)^{\frac{1}{m}} \frac{\left(\prod_{l=1}^{m} u(\tau_l(j))\right)^{\frac{1}{m}}}{u(j+1)}\right)\right)^{\frac{1}{m}} \tag{8.11}$$

$$\text{როცა } k \geq \eta_2(k_0).$$

რადგან

$$\frac{\left(\prod_{l=1}^{m} u(\tau_l(k))\right)^{\frac{1}{m}}}{u(k+1)} \geq 1,$$

ცხადია, რომ სრულდება (8.9) უტოლობა როცა $s = 1$. დავუშვათ (8.9) სრულდება რომელიმე $s \in \mathbb{N}$ –თვის, მაშინ (8.11)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{m} u(\tau_i(k))\right)^{\frac{1}{m}}}{u(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + m\left(\prod_{l=1}^{m} p_l(j)\right)^{\frac{1}{m}} \psi_s(j)\right)\right)^{\frac{1}{m}}$$

როცა $\mathrm{k} \geq \eta_{s+1}^{\tau_*}(k_0)$,

სადაც $\psi_s, s = 1,2,\ldots$ ფუნქციები მოცემულია (8.4)-(8.6) ტოლობებით. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 8.2. ვთქვათ

$$\liminf_{k\to+\infty} p(k) > 0 \tag{8.12}$$

და

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + mp^{1/m}(j)\alpha\right)}{\alpha} : \alpha \geq 1\right\} > 1 \tag{8.13}$$

მაშინ

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\liminf_{k\to+\infty} \psi_s(k)\right) = +\infty \tag{8.14}$$

სადაც p და ψ_s ფუნქციები მოცემულია (8.4)-(8.6) ტოლობებით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\liminf_{k\to+\infty} \psi_s(k)\right) = \beta < +\infty \tag{8.15}$$

მაშინ (8.12)-დან ყოველი $\varepsilon \in (0;\beta-1)$ – თვის არსებობს $k_0; s_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\psi_s(k) \geq \beta - \varepsilon \geq 1 \qquad \text{როცა} \quad k \in \mathbb{N}_{k_0} \quad \text{და} \quad s \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{8.16}$$

(8.16)-ის თანახმად (8.5)-დან

$$\psi_s(k) \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m} \qquad \text{როცა} \quad s \geq \eta_{s_0}^{\tau_*}(s_0),$$

სადაც p განსაზღვრულია (8.6) ტოლობით.

მაშასადამე

$$\liminf_{k\to+\infty} \psi_s(k) \geq \liminf_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან (8.16)-ის თანახმად გვაქვს

$$\beta \ge \liminf_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}.$$

მაშასადამე

$$\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta} \le 1. \tag{8.17}$$

(8.17) უტოლობის თანახმად ყოველი $\varepsilon \in (0;\beta)-$თვის გვაქვს

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\alpha\right)\right)^{1/m}}{\alpha} : \alpha \ge 1\right\} \le$$

$$\le \frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta-\varepsilon} =$$

$$= \frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta-\varepsilon} \le \frac{\beta}{\beta-\varepsilon}.$$

ε −ის ნებისმიერობის გამო გვაქვს

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\alpha\right)\right)^{1/m}}{\alpha} : \alpha \ge 1\right\} \le 1,$$

ეს უკანასკნელი ეწინააღმდეგება (8.13) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

8.1 თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ზოგადობის შეუზღუდავად (8.1) განტოლებას აქვს არარხევადი წესიერი ამონახსნი $u: \mathbb{N}_{k_0} \to (0;+\infty)$. მაშინ არსებობს $k_1 \ge k_0$ ისეთი, რომ

$$u(\tau_i(k)) > 0 \qquad \text{როცა} \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1} \qquad i = 1, \dots m.$$

თუ ვისარგებლებთ 8.1 ლემით და გავითვალისწინებთ (0.2) და (8.2) პირობებს

$$\frac{(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell k))^{\frac{1}{m}}}{u(k+1)} \geq \psi_s(k) \qquad \text{როცა} \quad k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_1), \ \ s = 1,2, \dots . \tag{8.18}$$

სადაც $\eta_s^{\tau_*}$ და $\psi_s(k)$ ფუნქციები მოცემულია (8.3), (8.5) ტოლობებით.

(8.1) განტოლებიდან (0.2), (8.2) -ის გამოყენებით მივიღებთ

$$u(\sigma_i(k) \geq \sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} \sum_{j=1}^{m} p_j(s) u(\tau_j(s)) \qquad \text{როცა} \quad k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_1), \ \ s = 1,2, \dots . \tag{8.19}$$

თუ გავითვალისწინებთ (8.10) პირობას მივიღებთ

$$u(\tau_j(s)) \geq u(\sigma_j(k)) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)}\right) \quad \text{როცა } \eta_s^{\tau_*}(k_1) \leq s \leq k, \quad j = 1, \dots, m. \tag{8.20}$$

ამიტომ (8.19) და (8.20)-ის თანახმად მვიღებთ

$$u(\sigma_i(k)) \geq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) u(\sigma_j(k)) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u(\sigma_j(k)) \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)}\right)\right) \qquad i = 1, \dots, m \, .$$

საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის უტოლობის გამოყენებით უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$u(\sigma_i(k)) \geq m \left(\prod_{j=1}^{m} u(\sigma_j(k))\right)^{1/m} \left(\prod_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_i(k)-1} \left(1 + m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(t)\right)^{1/m} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{u(\sigma_j(t))}{u(t+1)}\right)^{1/m}\right)\right)^{1/m}$$

როცა $k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_1), \ (i = 1, \dots m)$

მეორეს მხრივ ლემა 8.1-დან გვაქვს, რომ

$$\prod_{i=1}^{m} u(\sigma_i(k)) \geq m^m \prod_{i=1}^{m} u(\sigma_i(k)) \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_i(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(t)\right)^{1/m} \psi_s(t)\right)\right)^{1/m}$$

$$k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_1), \ s = 1,2 \dots ,$$

სადაც $\eta_s^{\tau_*}$ და $\psi_s(k)$ ფუნქციები მოცემულია (8.3)-(8.5) ტოლობებით. მაშასადამე როცა $s = s_0$

$$\limsup_{k\to+\infty}\prod_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k}p_i(s)\prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1}\left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m}p_\ell(t)\right)^{1/m}\psi_{s_0}(t)\right)\right)\right)^{1/m}\le\frac{1}{m^m},$$

რაც ეწინააღმდეგება (8.8) პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 8.1. ვთქვათ სრულდება (0.2) და (8.2) პირობები დაარსებობს$\sigma_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, i=1,\dots m$, არაკლებადი ფუნქციები ისეთი, რომ

$$\limsup_{k\to+\infty}\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m}\sum_{s=\sigma_l(k)}^{k}p_i(s)\prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1}\left(1+mp^{\frac{1}{m}}(j)\right)^{\frac{1}{m}}\right)>\frac{1}{m^m}. \tag{8.21}$$

მაშინ (8.1) განტოლება რხევადია, სადაც p ფუნქცია მცემულია (8.6) ტოლობით.

დამტკიცება. რადგან $\psi_s\ge 1$ საკმარისად დიდი $s,k,\in\mathbb{N}-$ თვის შედეგი 8.1-ის სამართლიანობა მარტივად გამომდინარეობს 8.1 თეორემიდან.

თეორემა 8.2. ვთქვათ სრულდება (0.2) და (8.2) პირობები დაარსებობს არაკლებადი $\sigma_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, i=1,\dots m$, ფუნქციები ისეთი, რომ სრულდება (8.7) პირობები. გარდა ამისა

$$\liminf_{k\to+\infty}p(j)>0 \tag{8.22}$$

და

$$min\left\{\frac{\liminf_{k\to+\infty}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}(1+m\alpha^{\frac{1}{m}}p^{\frac{1}{m}}(j))}{\alpha};\ \alpha\ge 1\right\}>1. \tag{8.23}$$

მაშინ (8.1) განტოლება რხევადია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ (8.1) განტოლებას გააჩნია არარხევადი $u:\mathbb{N}_{k_0}\to(0;+\infty)$ამონახსნი. მაშინ (8.22), (8.23) და 8.2 ლემის თანახმად სრულდება (8.14) პირობა. (8.22) და (8.7)-ის ძალით შევარჩიოთ M>0 ისეთი, რომ საკმარისად დიდი k-თვის

$$\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m}\sum_{s=\sigma_l(k)}^{k}p_i(s)\prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1}\left(1+mp^{\frac{1}{m}}(j)M^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)>\frac{2}{m^m}. \tag{8.24}$$

მეორეს მხრივ (8.14)-დან არსებობს $s_0\in\mathbb{N}$ და $k_0\in\mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\psi_{s_0}(k)\ge M$, როცა$k\in\mathbb{N}_{k_0}$. ამიტომ (8.24)-ის თანახმად სრულდება (8.8) პირობა. რაც ამტკიცებს 8.2 თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 8.2. ვთქვათ სრულდება (0.2) და (8.2) პირობები, საკმარისად დიდი $j\in\mathbb{N}$-თვის

$$p_i(j) \geq p_i > 0 \qquad (i = 1, \dots m) \tag{8.25}$$

და

$$p_* \liminf_{k\to+\infty} \frac{(m + \sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))^{m+\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))}}{(\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k)))^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))}} > 1. \tag{8.26}$$

მაშინ (8.1) განტოლება რხევადია, სადაც $\mathrm{p}_* = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p}_\mathrm{i}$.

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (8.13) პირობა. მართლაც (8.25)-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^m \prod_{j=\tau_i(k)}^k \left(1 + m\alpha^{\frac{1}{m}} p^{\frac{1}{m}}(j)\right)}{\alpha} \geq \frac{\liminf\limits_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^m \left(1 + m\alpha^{\frac{1}{m}} p_*^{\frac{1}{m}}\right)^{1+k-\tau_i(k)}}{\alpha} =$$

$$= \frac{\liminf\limits_{k\to+\infty} \left(1 + m\alpha^{\frac{1}{m}} p_*^{\frac{1}{m}}\right)^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))+m}}{\alpha} \geq$$

$$\geq \liminf_{k\to+\infty} \left\{ \min \frac{\left(1 + m\alpha^{\frac{1}{m}} p_*^{\frac{1}{m}}\right)^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))+m}}{\alpha} : \ \alpha \geq 1 \right\}. \tag{8.27}$$

რადგან

$$\min_{\alpha\geq 1} \frac{\left(1 + m\alpha^{\frac{1}{m}} p_*^{\frac{1}{m}}\right)^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))+m}}{\alpha} =$$

$$= \frac{p_* \left(\sum_{i=1}^m \left(k-\tau_i(k)\right) + m\right)^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))+m}}{\left(\sum_{i=1}^m \left(k-\tau_i(k)\right)\right)^{\sum_{i=1}^m (k-\tau_i(k))}}, \tag{8.28}$$

(8.27) და (8.28)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (8.13) პირობა. რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 8.3. ვთქვათ $n_i \in \mathbb{N}, (i - 1, \dots m)$, საკმარისად დიდი k-ებისთვის

$$\tau_i(k) \leq k - n_i, \qquad p_i(k) \geq p_i > 0, \qquad (i - 1, \dots m) \tag{8.29}$$

და

$$\frac{p_* (\sum_{i=1}^m n_i + m)^{\sum_{i=1}^m n_i + m}}{(\sum_{i=1}^m n_i)^{\sum_{i=1}^m n_i}} > 1 \tag{8.30}$$

მაშინ (8.1) განტოლება რხევადია, სადაც $p_* = \prod_{i=1}^m p_i$.

დამტკიცება. რადგან ფუნქცია $\frac{(m+x)^{m+x}}{x^x}$ არაკლებადია $(1 < x < +\infty)$, (8.29) და (8.30)-ის თანახმად სრულდება (8.23) პირობა, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შენიშვნა 8.1. ცხადია, რომ თუ სრულდება (8.29) და $m = 1$, მაშინ 8.3 შედეგიდან გამომდინარეობს თეორემა 7.5.2 [38] შრომის.

შენიშვნა 8.2. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგი არსებითად განსხვავებულიალადასის და ფილოსის [38] მიღებული შედეგისგან, რაზეც მიუთითებს ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი.

განვიხილოთ განტოლება

$$\Delta u(k) + p(k)u(k-1) = 0. \tag{8.31}$$

ლადასის, სპიკასის და ფილოსის [38] თეორემის პირობას მოცემული განტოლების შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე

$$\liminf_{k \to +\infty} P(k) > \frac{1}{4}, \tag{8.32}$$

ხოლო ჩვენი თეორემის პირობას ((8.13)) აქვს შემდეგი სახე

$$\liminf_{k \to +\infty} \left(\sqrt{P(k-1)} + \sqrt{P(k)}\right)^2 > 1 \tag{8.33}$$

ცხადია,რომ თუ სრულდება (8.32), მაშინ სრულდება (8.33) პირობა.

მეორეს მხრივ, თუ $\epsilon \in \left(0; \frac{1}{4}\right), P(2k) = \epsilon$ *და* $P(2k-1) = 1 - \epsilon \;\; l = 1,2, \dots$ მაშინ სრულდება (8.33) პირობა, მაგრამ არ სრულდება (8.32)პირობა. მაშასადამე, ჩვენი თეორემის პირობებში (8.31) განტოლების ყოველი წესიერიამონახსნი რხევადია.

დასკვნა

ნაშრომში შესწავლილია ოპერატორულ-დისკრეტული განტოლების ამონახსნების ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში. დადგენილია მოცემული განტოლების შემოუსაზღვრელი, რხევადი და ქრობადი ამონახსნების არსებობა.

ნაშრომის პირველი თავი ეძღვნება მაღალი რიგის ემდენ-ფაულერის ტიპის სხვაობიან განტოლებებს. დადგენილია დისკრეტული ფუნქციების ზოგიერთი ახალი თვისება, რომელთაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს ძირითადი შედეგების მიღებისას. დადგენილია საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ განტოლებას გააჩნდეს **A** ან **B** თვისება.

ნაშრომის მეორე თავში განხილულია მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება ,,თითქმის წრფივი" მინორანტით. დადგენილია დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები და ყოველი ამონახსნის რხევადობის საკმარისი პირობები. დასაბუთებულია მიღებული შედეგის ოპტიმალურობა.

მესამე თავში განხილულია პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლება მრავალი დაგვიანებით. განხილულია განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკითხი. მიღებულია ოპტიმალური შედეგები, რომლბიც წარმოადგენენ ლადასის, სპიკასის და ფილოსის ცნობილი თეორემის გარკვეულ განზოგადოებას.

ლიტერატურა

1. Bellman R., Stability theory of solutions of differential equations (Russia), M., 1951.
2. Berezansky I., Domoshnitsky A., Koplatadze R., Oscillation, nonoscillation, stability and asymptotic properties for second and higher order functional differential equations, Taylor and Francs.
3. Chatzarakis E., Koplatadze R., Stavroulakis I., Oscillation of first order linear difference equation with delay argument, I. Nonlinear Analisis 68, 2008, 994-1005.
4. Chatzarakis E., Koplatadze R., Stavroulakis I., Optimal oscillation criteria for first order difference equation with delay argument. I. Pacific Journal Mathematics. 233, 2008, N1, 15-33.
5. Domoshnitsky A., Koplatadze R., On asymptotic behavior of generalized Emden-fowler differential equations with delay argument. Abstract and Applic. Annalysis, 2014, Art. ID 168425, 13pp.
6. Domoshnitsky A., Koplatadze R., On higher order generalized Emden-Fowler differential equation with delay argument. Nonlinear Oscillations 18, 2015, N4, 507-526.
7. Greaf I., Koplatadze R., Kvinikadze G., Nonlinear functional differential equations with properties A and B. I. Math. Annal. Appl. 306, 2005, 136-160.
8. Infante G., Koplatadze R., Stavroulakis I., Oscillation criteria for differential equations with several retarded arguments, Funkcialaj EkvacioJ, 58(5015), N3, 347-364.
9. Khachidze N., On oscillatory properties of n-th order nonlinear difference equations with advanced argument. SEMINAR OF ILIA VEKUA INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS RIPORTS VOLUME 42, pp: 34-38, 2016, ISSN 1512-0058.
10. Khachidze N., On oscillatory properties of n-th order nonlinear difference equations with deviating argument, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS, Vol. 43, pp: 59-61, 2017, ISSN 1512-0058.
11. Kiguradze I., Chanturia T., Asymptotic properties of solutions of nonoutonomons ordinary differential equation, Boston: Kluver Academic, Publisers, 1993.
12. Koplatadze R., On oscillatory solutions of second order delay differential inequalities. I. Math. And Appl. 42 (1973), No1, 148-157.
13. Koplatadze R., A note on the conjugate of the solutions of higher order differential inequalities and equations with retarded argument (Russian), Differentsial'nye uravnenya 10 (1974), N8, 1400-1405.
14. Koplatadze R., Some properties of the solutions of nonlinear differential inequalities and equations with retarded argument (Russia), Differentsial'nye uravnenya 12 (1976), N11, 1971-1984.

15. Koplatadze R., Chanturia T., On oscillatory properties of differential equations with a deviating argument (Russia), Izdat. Tbilisi Univ., Tbilisi, 1977, 115p.
16. Koplatadze R., On oscillatory properties of n-th order differential equations with a delyed argument (Russia), Uspekhi Math. Nauk 41 (1986), N4, 1399.
17. Koplatadze R., Differential equations with deviating argument that have a properties A and B. (Russia), Differentsial'nye uravnenya 25(1989) N11, 1332-1342.
18. Koplatadze R., On higher order functional differential equations with Property A. Georgian Math. I. 11, 2004, N2, 307-366.
19. Koplatadze R., Quasi-linear functional-differential equations with property A. I. Math. Anal. Appl. 330, 2007, 483-510.
20. Koplatadze R., Litsyn E., Oscillation criteria fot higher order almost linear functional differential equation. Funct. Differ. Equ. 16(2009), N3, 387-434.
21. Koplatadze R., On asymptotic behavior of solutions of n-th order Emden-Fovler differential equations with advanced argument. Czachoslovak Math. J. 60 (135) (2010), No 3, 817-833.
22. Koplatadze R., Oscillatory properties of solutions of generalized Emden-fowler equations. Springer Proc. In Mathematics and Statistic. 47, 2013, 45-62.
23. Koplatadze R., On oscillatory properties of solutions of functional differential equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. 3, 1994, 3-179.
24. Koplatadze R., Oscillation of linear difference equations with deviating arguments. Comp. Math. Appl. 42, 2001, 477-486.
25. Koplatadze R., Kvinikadze G., Stavroulakis I., Oscillation of second order linear difference equations with deviating arguments, Adv. Math. Sci. Appl. 122, 2002, N1, 217-226.
26. Koplatadze R., Sharp A. Condition for the oscillation of linear difference equations. Simposium on Functional Differential Equation, Judea and Samaria, Israel, 2006, 15.
27. Koplatadze R., Kvinikadze G., Oscillation criteria of solutions of second order of linear difference equations. Proc. A. Razmadze Math. Inst> 147, 2008, 134-138.
28. Koplatadze R., Kvinikadze G., Necessary conditions for existence of positive solutions of second order linear difference equations and sufficient conditions for oscillation of solutions. J. Lelineini Koliv. 12, 2009, N2, 180-194.
29. Koplatadze R., Pinelas S., On oscillation of solutions of second order nonlinear difference equations. Translated from Nelineini Koliv. 15, 2012, N2, 194-204, I. Math. Sci. 189, 2013, N5, 784-794.
30. Koplatadze R., S. Pinelas, Oscillation criteria for first orderlinear difference equations with several delay arguments. Nonlinear Oscillations 17 (2014), N2, 247-267.

31. Koplatadze R., Oscillation criteria for differential and discrete equations with several delays, Bulletin of TICMI, 18, 2014, 10-17.
32. Koplatadze R., Specific properties of solution of first order differential equations with several delay arguments. I. Contemporary Math. Anal. 50, 2015, N5, 229-235.
33. Koplatadze R.G. and Chanturia T.A., On oscillating and monotone solutions of first order differential equations with a deviating argument. (Russian) Differentsnye Uravnenia 18(1982), N8, 1463-1465.
34. Koplatadze R., Khachidze N., Oscillation Criteria for Difference Equations with Several Retarded Arguments. Nonlinear Oscillations, Volume 21, №4, pp: 514-522, 2018. ISSN 1562-3076.
35. Koplatadze R., Khachidze N., NONLILEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH PROPERTY A AND B. FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, VOLUME 25 NO 1–2, PP: 91-95, ISRAEL 2018.
36. Koplatadze R., Khachidze N., Oscillation of solutions of second order almost linear difference equations, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS, Vol. 43, pp: 62-69, 2017, ISSN 1512-0058.
37. **Koplatadze R., Khachidze N., On asymptotic behavior of solutions of n-th order Emden-fowler type difference equations with advanced argument, J. Contemporary Math. Anal.(წარდგენილია, იბეჭდება).**
38. Ladas I., Philos CH., Sficas Y., Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, I. Appl. Math. Simulation 2(1989), N2, 101-111.
39. Sansone G., ordinary differential equations (Russia), T.1.M., 1954.